



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Band 102.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

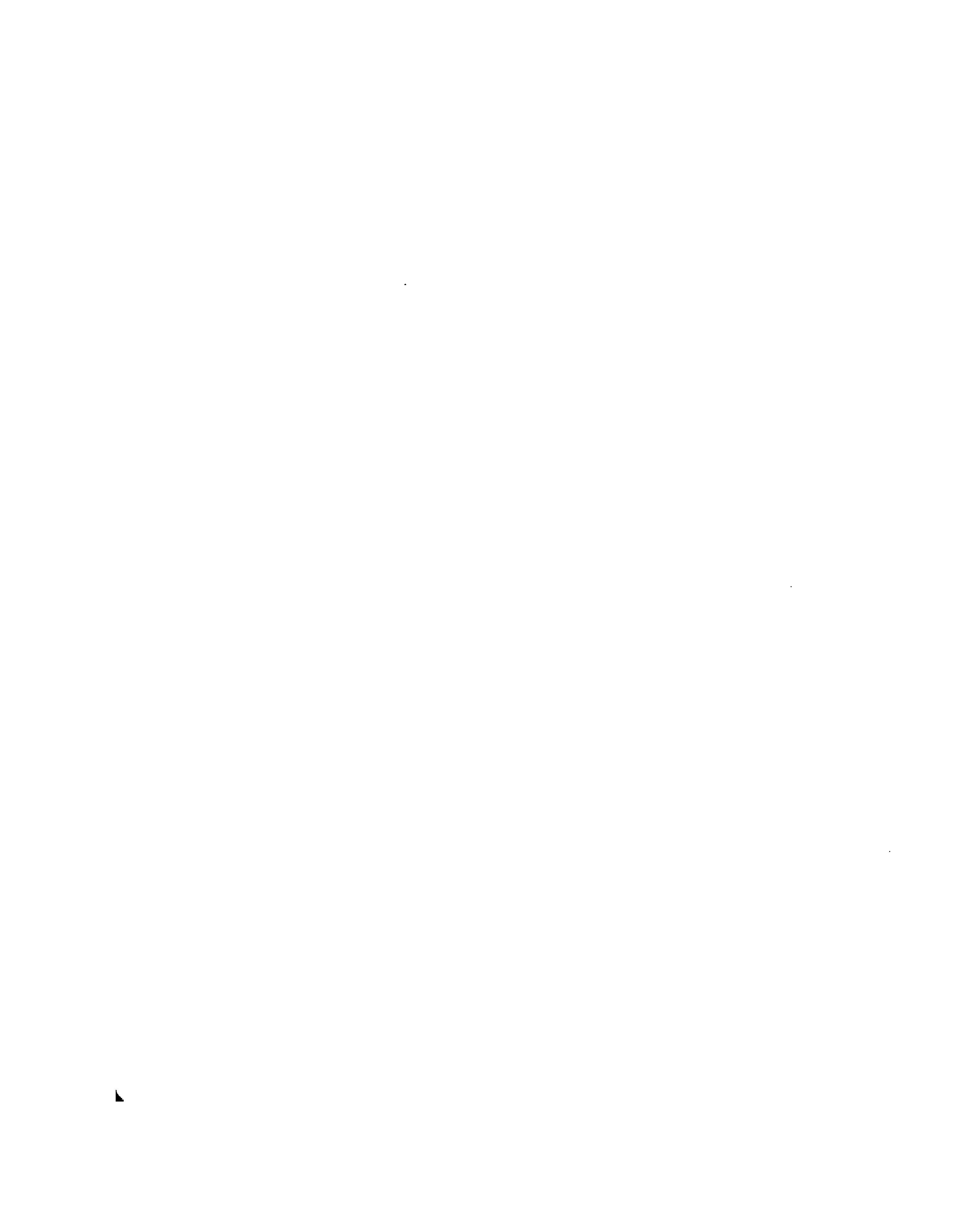
Berlin, 1888.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltische Strasse 12.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 102.



Ueber primitive Gruppen.

(Von Herrn *F. Rudio* in Zürich.)

Im 16. Bande des *Liouville*schen Journals (Serie 2) hat Herr *Camille Jordan* das folgende bemerkenswerthe Theorem bewiesen:

Enthält eine primitive Gruppe des Grades n eine primitive Gruppe des Grades ν, so ist sie mindestens $(n-\nu+1)$-fach transitiv. (Vergl. namentlich auch *Netto* Bd. 83 dieses Journals.)

Im Folgenden soll dieser Satz auf einem directeren Wege bewiesen werden unter Benutzung einer Eigenschaft primitiver Gruppen, welche die übliche Definition der Primitivität und Imprimitivität ihrem Inhalte nach zu vereinfachen geeignet ist.

I.

Wie man auch die Elemente einer primitiven Gruppe in zwei Systeme $a_1 a_2 \dots a_\lambda$ und $b_1 b_2 \dots b_\mu$ $(\lambda > 1,\ \mu > 0)$ vertheilen mag, die Gruppe enthält immer eine Substitution, welche ein a durch ein anderes a und gleichzeitig ein a durch ein b ablöst.

In der citirten Abhandlung benutzt Herr *Netto* diesen Satz, aber ohne ihn in dieser allgemeinen Form auszusprechen und auch ohne Beweis. Er bildet aber einen wesentlichen Bestandtheil unserer Untersuchung.

Zum Beweise nehme man an, die primitive Gruppe enthalte keine Substitution, welche ein a durch ein anderes a und gleichzeitig ein a durch ein b ablöst. Dann enthält sie auch keine Substitution, welche ein a durch ein b ablöst und irgend ein a unversetzt lässt. Denn angenommen, $\sigma = (a_1)(a_2 b_1 \dots)\dots$ sei eine solche, dann giebt es eine Substitution $\tau = (a_1 a_2 \dots)\dots$, welche in Folge unsrer Voraussetzung b_1 entweder unversetzt lässt oder durch ein anderes b ablöst. Die Substitution $\sigma\tau$ löst dann aber a_1 durch a_2 und gleichzeitig a_2 durch ein b ab, widerspricht also unsrer Voraussetzung.

In Folge dessen muss die Substitution $s = (a_1 b_1 \ldots) \ldots$ jedes a durch ein Element b ablösen. Es ist also $\mu \geqq \lambda$. Ist $\mu = \lambda$, so bilden jetzt die Elemente $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ und $b_1, b_2, \ldots b_\lambda$ zwei Systeme der Imprimitivität, insofern jede Substitution die Elemente eines Systems entweder durch alle Elemente desselben oder durch alle Elemente des andern Systems ablöst.

Ist dagegen $\mu > \lambda$, so zerfallen die Elemente unsrer Gruppe in die drei Systeme $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$; $b_1, b_2, \ldots b_\lambda$ und $c_1, c_2, \ldots c_\nu$, wo die b die durch die Substitution s definirten Elemente bedeuten sollen. Dann ist zunächst klar, dass jede Substitution, welche ein b durch ein b ablöst, jedes b durch ein b ablösen muss; denn andernfalls würden wir durch Transformation mittels der Substitution s^{-1}, welche jedes b durch ein a ablöst, eine Substitution herstellen können, welche unsrer Voraussetzung widerspricht. Daraus folgt weiter, dass jede Substitution, welche ein a_i durch ein b_k ablöst, jedes a durch ein b ablösen muss. Denn wenn wir zunächst a_i durch a_1, dieses dann mittels der Substitution s durch b_1 und dieses endlich durch b_k ablösen, so wird jedes a zunächst durch ein a, dieses dann durch das entsprechende b und dieses endlich wieder durch ein b abgelöst. Ebenso muss jede Substitution, welche ein b durch ein a ablöst, jedes b durch ein a ablösen. Die Substitution $t = (a_1 c_1 \ldots) \ldots$ muss daher jedes a durch ein c ablösen, d. h. es ist $\nu \geqq \lambda$. Ist $\nu = \lambda$, so bilden jetzt die Elemente $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$; $b_1, b_2, \ldots b_\lambda$; $c_1, c_2, \ldots c_\lambda$ drei Systeme der Imprimitivität. Hierzu ist nur noch einzusehen, dass jede Substitution, welche ein c durch ein c ablöst, jedes c durch ein c ablösen muss. Andernfalls würden wir nämlich durch Transformation mittels der Substitution t^{-1}, welche jedes c durch ein a ablöst, zu einer Substitution gelangen, welche unsrer Voraussetzung widerspricht. Ist dagegen $\nu > \lambda$, so tritt zu den drei Systemen $a_1, \ldots a_\lambda$; $b_1, \ldots b_\lambda$; $c_1, \ldots c_\lambda$ noch ein viertes $d_1, \ldots d_\varrho$ hinzu, und es lässt sich dann wieder zeigen, dass $\varrho \geqq \lambda$ ist. So fortfahrend erkennt man, dass in Folge unserer Annahme die Elemente in Systeme der Imprimitivität zerfallen, dass also die gegebene Gruppe keine primitive ist. Man kann daher die Primitivität und Imprimitivität folgendermassen definiren:

Eine transitive Gruppe heisst imprimitiv, wenn es möglich ist, ihre Elemente in 2 Systeme $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ *und* $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ $(\lambda > 1, \mu > 0)$ *derart zu vertheilen, dass eine Substitution, welche ein a durch ein anderes a und gleichzeitig ein a durch ein b ablöst, nicht vorkommt. Sie heisst primitiv, wenn eine solche Vertheilung ihrer Elemente unmöglich ist.*

Bei der imprimitiven Gruppe ist es dann, wie wir gesehen haben, Gegenstand des Beweises, dass ihre Elemente in Systeme von gleich vielen Elementen derart vertheilt werden können, dass jede Substitution der Gruppe die Elemente eines Systems entweder durch alle Elemente desselben oder eines und desselben anderen Systems ablöst.

Als Anwendung möge der Beweis eines Satzes folgen, den mir Herr *Frobenius* mitgetheilt hat und der in vielen Fällen ein nützliches Kriterium der Imprimitivität liefert:

Wenn in einer transitiven Gruppe alle Substitutionen, welche ein bestimmtes Element, etwa x_1, nicht enthalten, noch ein bestimmtes zweites Element, etwa x_2, ungeändert lassen, so ist die Gruppe imprimitiv.

Die gegebene transitive Gruppe sei von der Ordnung h und vom Grade n. Dann giebt es $r = \frac{h}{n}$ Substitutionen, — sie mögen $s_1, s_2, \dots s_r$ heissen —, welche x_1 nicht enthalten. Angenommen, alle diese r Substitutionen liessen auch noch gleichzeitig bestimmte andere Elemente ungeändert, und zwar seien $x_1, x_2, \dots x_k$ *alle* Elemente, welche bei jeder der r Substitutionen unversetzt bleiben. Ausser jenen r Substitutionen enthält dann die Gruppe keine andere, welche eines der Elemente $x_1, x_2, \dots x_k$ ungeändert lässt. Seien nun x_α und x_β zwei beliebige Elemente des Systems $x_1, x_2, \dots x_k$. Nach dem Früheren reicht es dann zum Beweise der Imprimitivität der gegebenen Gruppe aus, zu zeigen, dass jede ihrer Substitutionen, welche x_α durch x_β ablöst, ein jedes Element des Systems $x_1, x_2, \dots x_k$ wieder durch ein Element desselben Systems ersetzt.

In der That, sei t eine Substitution der Gruppe, welche x_α durch x_β und gleichzeitig ein dem Systeme $x_1, x_2, \dots x_k$ angehöriges Element x_γ (welches auch gleich x_β sein kann) durch ein Element x_δ ablöst. Dann ist zu zeigen, dass auch x_δ dem Systeme $x_1, x_2, \dots x_k$ angehört. Transformirt man aber $s_1, s_2, \dots s_r$ durch t, so erhält man r Substitutionen, welche x_β nicht enthalten und welche folglich, abgesehen von der Reihenfolge, mit $s_1, s_2, \dots s_r$ identisch sind. Da aber diese transformirten Substitutionen auch sämmtlich x_δ nicht enthalten, und da ferner $x_1, x_2, \dots x_k$ die einzigen Elemente sind, welche in allen r Substitutionen $s_1, s_2, \dots s_r$ fehlen, so muss folglich x_δ dem System $x_1, x_2, \dots x_k$ angehören. Die Gruppe ist daher imprimitiv.

II.

Nach dieser Vorbereitung möge zunächst folgender Satz bewiesen werden:

Enthält eine primitive Gruppe G des Grades n eine transitive Gruppe g des Grades ν, so enthält sie auch eine zu g ähnliche Gruppe, welche zwei vorgeschriebene Elemente von G versetzt.

Transformirt man nämlich g durch alle Substitutionen von G und bildet aus den so entstehenden ähnlichen Gruppen $g, g', g'', \ldots$ die Gruppe $H=(g, g', g'', \ldots)$, so ist diese transitiv, weil G primitiv ist. (Vergl. *C. Jordan,* Traité etc. Nr. 53.) Da nun die transitive Gruppe H eine Substitution enthalten muss, welche ein beliebiges x_i durch ein beliebiges x_k ablöst, so ist dies doch nur dadurch möglich, dass entweder eine der Gruppen $g, g', g'', \ldots$ bereits x_i und x_k enthält, oder aber, dass die Verbindung von x_i und x_k durch Vermittlung von Elementen $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varrho, x_\sigma$ erfolgt, in dem Sinne, dass eine Gruppe g_i die Elemente x_i und x_α, eine andere g_α die Elemente x_α und x_β u. s. f., schliesslich eine Gruppe g_ϱ die Elemente x_ϱ und x_σ und eine Gruppe g_σ die Elemente x_σ und x_k enthält. Von den Gruppen $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varrho$ darf vorausgesetzt werden, dass sie x_i und x_k nicht enthalten, weil sonst die Verbindung zwischen diesen Elementen auf einem kürzeren Wege hergestellt werden könnte. Transformirt man nun g_i durch die Substitution $(x_\alpha x_\beta \ldots)\ldots$ von g_α, so entsteht eine ähnliche Gruppe, welche x_i und x_β enthält. Diese transformire man durch die Substitution $(x_\beta, x_\gamma, \ldots)\ldots$ von g_β und erhält eine ähnliche Gruppe, welche x_i und x_γ enthält u. s. f., bis man zu einer Gruppe gelangt, welche x_i und x_k enthält.

Es besitzt also in der That G eine zu g ähnliche Gruppe, welche zwei vorgeschriebene Elemente von G umfasst. Ist beispielsweise $\nu=2$, so folgt aus diesem Satze, dass, wenn eine primitive Gruppe eine Transposition enthält, sie alle Transpositionen enthalten muss, also symmetrisch ist.

III.

Wenn eine Gruppe G des Grades n allemal eine Untergruppe besitzt, welche zwei beliebig vorgeschriebene Elemente von G enthält und einer gegebenen primitiven Gruppe g des Grades ν ähnlich ist, so besitzt G auch eine zu g ähnliche Untergruppe, welche zwei vorgeschriebene Elemente enthält, ein vorgeschriebenes drittes aber nicht.

In diesem Satze und der weiter unten folgenden Anwendung desselben auf die Bestimmung der Transitivität von G besteht wesentlich der Unterschied zwischen dem hier entwickelten Beweise des *Jordan*schen Theorems und demjenigen, welchen Herr *Netto* in der oben erwähnten Abhandlung gegeben hat.

Es seien x_i, x_k, x_l drei beliebig gewählte Elemente von G. Nach Voraussetzung existirt eine zu g ähnliche Untergruppe h, welche x_i und x_k enthält. Angenommen, sie enthalte auch x_l, dann giebt es eine andere zu g ähnliche Untergruppe h', welche x_i und etwa x_r enthält, wo x_r ein neues in h nicht vorkommendes Element bedeute. Enthält h' ausser x_r noch andere neue, d. h. in h nicht vorkommende Elemente, so muss nach der Definition der Primitivität die primitive Gruppe h' eine Substitution besitzen, welche ein neues Element durch ein anderes neues und gleichzeitig ein altes Element, etwa x_l, durch ein neues ablöst. Transformirt man h durch diese Substitution, so entsteht eine ähnliche Gruppe h'', welche in Bezug auf h weniger neue Elemente besitzt als h', aber sicherlich noch eines. Enthält h'' mehr als ein neues Element, so kann man h abermals durch eine passende Substitution von h'' transformiren u. s. f. So gelangt man schliesslich zu einer Gruppe h_1, welche zu h ähnlich ist und mit h in allen Elementen bis auf eines übereinstimmt. Enthält h_1 zufällig das Element x_l nicht, so ist h_1 die gewünschte Gruppe, kommt aber x_l noch vor und ist x_m das eine fremde in h nicht vorkommende Element von h_1, so transformire man h durch die Substitution $(x_m x_l \ldots)\ldots$ von h_1, wodurch x_l wegfällt. In jedem Falle also erhalten wir eine zu g ähnliche Untergruppe, welche die vorgeschriebenen Elemente x_i und x_k enthält, ein vorgeschriebenes drittes Element x_l aber nicht.

IV.

Enthält eine primitive Gruppe G des Grades n eine primitive Gruppe g des Grades ν, so enthält sie auch eine zu g ähnliche Gruppe mit ν vorgeschriebenen Elementen.

Die Elemente von G seien $x_1, x_2, \ldots x_{n-\nu}, x_{n-\nu+1}, \ldots x_n$, dann lässt sich zeigen, dass eine zu g ähnliche Untergruppe von G existirt, welche die Elemente $x_{n-\nu+1}, \ldots x_n$ enthält. Nach dem Früheren besitzt nämlich G eine zu g ähnliche Untergruppe, welche die beliebig gewählten Elemente

x_i und x_k enthält, das Element x_1 aber nicht. Bezeichnen wir daher mit G_1 diejenige Gruppe, welche aus allen Substitutionen von G besteht, die x_1 nicht enthalten, so besitzt G_1 allemal eine Untergruppe, welche zu g ähnlich ist und die beliebig gewählten Elemente x_i und x_k von G_1 enthält. Es gelten also für G_1 genau dieselben Voraussetzungen wie für G selbst, und es besitzt daher nach dem Satze III G_1 auch eine zu g ähnliche Untergruppe, welche zwei vorgeschriebene Elemente von G_1 enthält, ein vorgeschriebenes drittes, etwa x_2, aber nicht. Bezeichnen wir daher mit G_2 diejenige Gruppe, welche aus allen Substitutionen von G_1 besteht, die x_2 nicht enthalten, so besitzt jetzt G_2 allemal eine zu g ähnliche Untergruppe, welche zwei beliebig gewählte Elemente von G_2 enthält. Es gelten daher auch für G_2 dieselben Voraussetzungen wie für G_1 und für G, und es besitzt daher auch G_2 eine zu g ähnliche Untergruppe, welche zwei beliebig vorgeschriebene Elemente von G_2 enthält, ein vorgeschriebenes drittes, etwa x_3, aber nicht.

Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von Gruppen G, G_1, G_2, ... $G_{n-\nu}$, von denen jede folgende eine Untergruppe der vorhergehenden ist und welche alle dieselben Voraussetzungen erfüllen wie G selbst. Die letzte Gruppe $G_{n-\nu}$ dieser Reihe enthält die ν Elemente $x_{n-\nu+1}$, ... x_n und besitzt eine zu g ähnliche Untergruppe h des Grades ν. Da aber h auch eine Untergruppe von G ist, so ist damit gezeigt, dass G eine zu g ähnliche Gruppe besitzt, welche ν vorgeschriebene Elemente enthält.

Besitzt beispielsweise G eine Circularsubstitution der Primzahlordnung p, so besitzt sie auch eine dazu ähnliche Substitution, welche p vorgeschriebene Elemente enthält. Da für $p = 3$ die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt, so folgt, dass, wenn eine primitive Gruppe eine Circularsubstitution dritter Ordnung enthält, sie alle Circularsubstitutionen dritter Ordnung enthalten muss, also die alternirende Gruppe umfasst.

V.

Enthält eine primitive Gruppe G des Grades n eine primitive Gruppe g des Grades ν, so ist sie mindestens $(n-\nu+1)$***-fach transitiv.***

Wir haben soeben, ausgehend von der Existenz der primitiven Gruppe g des Grades ν, eine Reihe von Gruppen G, G_1, G_2, ... $G_{n-\nu}$ construirt, von denen jede folgende eine Untergruppe der vorhergehenden ist. Alle diese Gruppen sind transitiv; denn eine jede derselben besitzt eine transi-

tive Untergruppe, welche zwei beliebige ihrer Elemente enthält. Nun gilt aber folgender Satz:

Ist G eine k-fach transitive Gruppe des Grades n, ferner G_k diejenige Gruppe, welche aus allen Substitutionen von G besteht, die $x_1, x_2, \dots x_k$ nicht versetzen, und ist G_k noch λ-fach transitiv, so ist die ursprüngliche Gruppe G $(k+\lambda)$-fach transitiv.

Daraus folgt, dass von den Gruppen $G, G_1, G_2, \dots G_{n-\nu}$ jede vorhergehende einmal mehr transitiv ist als die folgende. Es ist also G mindestens $(n-\nu+1)$-fach transitiv.

Ist die gegebene Untergruppe g von G λ-fach transitiv, so muss natürlich G mindestens $(n-\nu+\lambda)$-fach transitiv sein.

Aus dem bekannten Theoreme des Herrn *C. Jordan* über die Grenze der Transitivität ergiebt sich jetzt die Folgerung:

Enthält eine primitive Gruppe G des Grades n eine primitive Gruppe, deren Grad eine gewisse von n abhängige Grenze nicht übersteigt, so ist G alternirend oder symmetrisch.

Diese Grenze ist die grösste Primzahl, welche kleiner als $n-2$ ist.

VI.

Man kann dem nunmehr bewiesenen *Jordan*schen Theoreme noch eine andere Fassung geben. Die primitive Untergruppe g des Grades ν möge die $n-\nu=k$ Elemente $x_1, x_2, \dots x_k$ unversetzt lassen. G_k sei diejenige Gruppe, welche aus allen Substitutionen von G gebildet ist, die $x_1, x_2, \dots x_k$ nicht versetzen, dann ist auch G_k primitiv. Es folgt dann weiter, dass jede Gruppe, die aus allen Substitutionen von G gebildet ist, welche bestimmte andere k Elemente unversetzt lassen, zu G_k ähnlich ist, und dasselbe gilt von den entsprechenden Untergruppen höheren Grades, welche gleich viele Elemente unversetzt lassen. Das *Jordan*sche Theorem lässt sich nun folgendermassen aussprechen:

Ist G eine primitive Gruppe und ist diejenige Gruppe, welche aus allen Substitutionen von G besteht, die k bestimmte Elemente unversetzt lassen, wiederum primitiv, so ist G mindestens $(k+1)$-fach transitiv.

In dieser Form bildet der Satz eine wichtige Ergänzung zu dem in V. benutzten Hülfssatze. Es zeigt sich nämlich jetzt, dass letzterer in seinen Voraussetzungen zu viel verlangt. Es ist nicht nothwendig, G als eine

k-fach transitive Gruppe vorauszusetzen, um aus der λ-fachen Transitivität von G_k auf die $(k+\lambda)$-fache Transitivität von G schliessen zu dürfen, es genügt zu wissen, dass G primitiv ist.

Anmerkung. Es sei gestattet, an dieser Stelle ein Versehen zu berichtigen, welches sich in meiner Arbeit: „Ueber die Bewegung dreier Punkte in einer Geraden" (Bd. 100) befindet, und auf welches mich Herr *Schläfli* aufmerksam zu machen die Güte hatte. In der letzten Gleichung pag. 445 ist ein Quadratzeichen übersehen worden. In Folge dessen ist auf der linken Seite der folgenden Gleichung die Quadratwurzel zu streichen und das bezügliche Integral entsprechend abzuändern. Endlich ist noch pag. 445 Zeile 8 von unten $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ statt Φ zu lesen.

Zürich, den 12. Januar 1887.

Zur Theorie der Function $E(x)$.

(Von Herrn *M. Stern* in Bern.)

Seien m und n zwei ganze positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, x eine positive aber nicht ganze Zahl und sei $mx = E(mx)+h$, $nx = E(nx)+g$, also g und h kleiner als die Einheit. Nimmt man dann die Differenz der zwei Reihen

$$A. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h\right) \quad \text{und} \quad B. = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}+g\right),$$

so findet man $A.-B. = nh-mg = mE(nx)-nE(mx)$. Um dies zu beweisen, bemerke man zunächst, dass jeder Ausdruck $E\left(\frac{lm}{n}+h\right)$, wo l irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, entweder $=E\left(\frac{lm}{n}\right)$ oder $=E\left(\frac{lm}{n}\right)+1$ ist, ebenso $E\left(\frac{ln}{m}+g\right)$ entweder $E\left(\frac{ln}{m}\right)$ oder $E\left(\frac{ln}{m}\right)+1$. Ein Glied $E\left(\frac{lm}{n}+h\right)$ der ersten Reihe, welches $=E\left(\frac{lm}{n}\right)+1$ ist, ebenso ein Glied $E\left(\frac{ln}{m}+g\right)$ der zweiten Reihe, welches $=E\left(\frac{ln}{m}\right)+1$ ist, soll im Folgenden ein *vollständiges* Glied heissen. Nun ist bekanntlich

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}\right) = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1),$$

die Differenz $A.-B.$ giebt also den Unterschied der Anzahl der vollständigen Glieder an, welche in der ersten und in der zweiten Reihe vorkommen.

Sei nun $h \geqq \frac{k}{n}$ und $h < \frac{k+1}{n}$, wo k eine ganze positive Zahl (Null eingeschlossen) bedeuten soll. Dann werden in der ersten Reihe alle und nur die Glieder vollständige sein, bei welchen $\frac{rm}{n} \gtreqqless E\left(\frac{rm}{n}\right)+1-\frac{k}{n}$ ist; d. h. wenn man $\frac{rm}{n} = E\left(\frac{rm}{n}\right)+\frac{\alpha}{n}$ setzt, so muss α einen der k Werthe

$n-1$, $n-2$, ... $n-k$ annehmen. Da aber für r alle Zahlen 1, 2, ... $n-1$ gesetzt werden sollen, so muss auch α alle diese Werthe, wenn auch in anderer Ordnung, annehmen. Denn gäbe es zwei Werthe $\frac{r'm}{n}$ und $\frac{r''m}{n}$, so dass r' und r'' zwei ganze Zahlen wären, die beide kleiner als n sind, und man hätte

$$\frac{r'm}{n} = E\left(\frac{r'm}{n}\right) + \frac{\alpha''}{n} \quad \text{und} \quad \frac{r''m}{n} = E\left(\frac{r''m}{n}\right) + \frac{\alpha''}{n},$$

so wäre $(r'-r'')\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, was nicht sein kann, da m und n keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es müssen also unter den Werthen von α auch die k Werthe $n-1$, $n-2$, ... $n-k$ vorkommen, und es giebt mithin in der ersten Reihe wirklich k vollständige Glieder. Setzt man ferner $g \geqq \frac{i}{m}$, $g < \frac{i+1}{m}$, so ergiebt sich ebenso, dass die zweite Reihe i vollständige Glieder enthält, und demnach

$$A.-B. = k-i.$$

Nun ist

$$mx = E(mx)+h \geqq E(mx)+\frac{k}{n}, \quad mx < E(mx)+\frac{k+1}{n},$$

also

$$mnx \geqq nE(mx)+k, \quad mnx < nE(mx)+k+1$$

und

$$E(mnx) = nE(mx)+k.$$

Ebenso folgt aus

$$nx \geqq E(nx)+\frac{i}{m}, \quad nx < E(nx)+\frac{i+1}{m},$$

$$E(mnx) = mE(nx)+i.$$

Also

$$A. = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+k = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+E(mnx)-nE(mx),$$

$$B. = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+i = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+E(mnx)-mE(nx),$$

und

$$A.-B. = k-i = mE(nx)-nE(mx) = nh-mg,$$

was zu beweisen war.

In dem besonderen Falle, wenn $m=1$ ist, wird $B=0$, und man hat

$$A. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h\right) = E(nx)-nE(x).$$

Nun ist in diesem Falle $h = x-E(x)$, also $nh = nx-nE(x)$ und $E(nh) = E(nx)-nE(x)$, mithin

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h\right) = E(nh).$$

Es wurde zwar hierbei $h < 1$ vorausgesetzt; diese Einschränkung ist jedoch nur scheinbar. Setzt man nämlich $h' = s + h$, wo s eine ganze positive Zahl bedeutet, an die Stelle von h, so hat man

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h'\right) = (n-1)s + \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h\right) = ns - s + E(nh) = En(s+h) - E(s+h)$$

oder

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{r}{n}+h'\right) = E(nh') - E(h').$$

Diesen Satz hat zuerst Herr *Hermite* gefunden *).

Es wurde bisher vorausgesetzt, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Der oben benutzte Satz $\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}\right)$ gilt aber auch noch, wenn m und n einen grössten gemeinschaftlichen Factor q haben, obgleich in diesem Falle der Werth der zwei Reihen nicht mehr $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$ ist. Ist nämlich $m = qt$, $n = qu$, so hat man

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right) = \sum_{v=1}^{qu-1} E\left(\frac{vt}{u}\right).$$

Nun kann man diese Reihe in die folgenden q Reihen zerlegen

$$\begin{aligned}
& E\left(\frac{t}{u}\right) + E\left(\frac{2t}{u}\right) + \cdots + E\left((u-1)\frac{t}{u}\right) + t \\
& + E\left((u+1)\frac{t}{u}\right) + E\left((u+2)\frac{t}{u}\right) + \cdots + E\left((2u-1)\frac{t}{u}\right) + 2t \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \quad E\left[((q-2)u+1)\frac{t}{u}\right] + \cdots + E\left[((q-1)u-1)\frac{t}{u}\right] + (q-1)t \\
& + \quad E\left[((q-1)u+1)\frac{t}{u}\right] + \cdots + E\left((qu-1)\frac{t}{u}\right),
\end{aligned}$$

wofür man auch setzen kann:

$$\begin{aligned}
& E\left(\frac{t}{u}\right) + E\left(\frac{2t}{u}\right) + \cdots + E\left((u-1)\frac{t}{u}\right) + t \\
& + E\left(\frac{t}{u}\right) + E\left(\frac{2t}{u}\right) + \cdots + E\left((u-1)\frac{t}{u}\right) + (u-1)t + 2t \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + E\left(\frac{t}{u}\right) + E\left(\frac{2t}{u}\right) + \cdots + E\left((u-1)\frac{t}{u}\right) + (q-2)(u-1)t + (q-1)t \\
& + E\left(\frac{t}{u}\right) + E\left(\frac{2t}{u}\right) + \cdots + E\left((u-1)\frac{t}{u}\right) + (q-1)(u-1)t.
\end{aligned}$$

*) Acta Mathem. T. V. p. 315.

Demnach ist

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right) = \frac{q(t-1)(u-1)}{2} + \frac{q(q-1)(u-1)t}{2} + \frac{q(q-1)t}{2}$$
$$= \frac{q(t-1)(u-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} tu$$

oder, indem man wieder m statt qt und n statt qu setzt,

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{q-1}{2}.$$

Dieser Werth ändert sich nicht, wenn man m und n vertauscht; durch diese Vertauschung geht aber $\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}\right)$ in $\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}\right)$ über, und man hat mithin $\frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{q-1}{2}$ als Werth jeder dieser beiden Reihen.

Statt der Reihen $A.$ und $B.$ hat man jetzt die Reihen

$$C. = \sum_{v=1}^{qu-1} E\left(\frac{vt}{u} + h\right),$$
$$D. = \sum_{v=1}^{qt-1} E\left(\frac{vu}{t} + g\right),$$

indem man noch immer

$$mx = E(mx) + h, \quad nx = E(nx) + g$$

setzt.

Nimmt man nun

$$h \gtreqless \frac{q\alpha}{qu}, \quad h < \frac{q\alpha+1}{qu}, \quad g \gtreqless \frac{q\beta}{qt}, \quad g < \frac{q\beta+1}{qt},$$

wo α und β ganze positive Zahlen (oder Null) sind, so folgt aus dem früher in Beziehung auf die Reihe $A.$ Gesagten, dass die Zahl der vollständigen Glieder, welche die Reihe $\sum_{v=1}^{u-1} E\left(\frac{vt}{u} + h\right)$ enthält, gleich α ist, und man hat mithin

$$\sum_{v=1}^{u-1} E\left(\frac{vt}{u} + h\right) = \sum_{v=1}^{u-1} E\left(\frac{vt}{u}\right) + \alpha.$$

Aus dem oben über die Zerlegung der Reihe $\sum_{v=1}^{qu-1} E\left(\frac{vt}{u}\right)$ in q Reihen Gesagten ergiebt sich daher

$$C. = \sum_{v=1}^{qu-1} E\left(\frac{vt}{u} + h\right) = \frac{q(t-1)(u-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} tu + q\alpha,$$
$$D. = \sum_{v=1}^{qt-1} E\left(\frac{vu}{t} + g\right) = \frac{q(t-1)(u-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} tu + q\beta;$$

mithin $C. - D. = q(\alpha - \beta)$.

Nun ist

$$mx \geqq E(mx)+\frac{q\alpha}{qu},\quad mx < E(mx)+\frac{q\alpha+1}{qu}$$

oder

$$mx \geqq E(mx)+\frac{q\alpha}{n},\quad mx < E(mx)+\frac{q\alpha+1}{n};$$

mithin

$$mnx \geqq nE(mx)+q\alpha,\quad mnx < nE(mx)+q\alpha+1.$$

Ebenso ergiebt sich aus

$$nx \geqq E(nx)+\frac{q\beta}{m},\quad nx < E(nx)+\frac{q\beta+1}{m}:$$

$$mnx \geqq mE(nx)+q\beta,\quad mnx < mE(nx)+q\beta+1.$$

Demnach

$$E(mnx) = nE(mx)+q\alpha = mE(nx)+q\beta,$$

d. h.

$$C.-D. = q\alpha-q\beta = mE(nx)-nE(mx) = nh-mg.$$

Es ist dies derselbe Werth, der oben für $A.-B.$ gefunden worden ist.

In den Reihen $A.$ und $B.$ kommen gleich viel vollständige Glieder vor, wenn $\frac{n}{m} = \frac{g}{h} = \frac{E(nx)}{E(mx)}$, also $nh-mg = k-i = 0$ ist. Die beiden Reihen haben dann gleichen Werth und enthalten beide, wenn m' die kleinere der zwei Zahlen m und n bezeichnet, höchstens $m'-1$ vollständige Glieder.

Da nun in diesem Falle $h = g\frac{m}{n}$, so hat man mithin den Satz: Es ist

$$F. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left((g+r)\frac{m}{n}\right) = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}+g\right).$$

Setzt man $g = \frac{hn}{m}$, so erhält man denselben Satz in der Form

$$\sum_{s=1}^{m-1} E\left((h+s)\frac{n}{m}\right) = \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h\right).$$

Ist z. B. $m = 5$, $n = 7$, $x = \frac{2}{17}$, so ist $mx = \frac{10}{17} = h$, $nx = \frac{14}{17} = g$, mithin $nh-mg = 0$. Hier ist

$$\sum_{r=1}^{6} E\left(\left(\tfrac{14}{17}+r\right)\tfrac{5}{7}\right) = \sum_{s=1}^{4} E\left(s.\tfrac{7}{5}+\tfrac{14}{17}\right) = 16,$$

und jede Reihe enthält vier vollständige Glieder.

Nun kann man die Bedingungen, auf welchen die Gleichung $F.$ beruht, nämlich $nx = E(nx)+g$, $mx = E(mx)+h$, $nh = gm$ immer erfüllen,

wenn m und n zwei gegebene ganze positive Zahlen sind, g eine gegebene Zahl < 1, und zugleich $mg < n$, welche letzte Bedingung also von selbst erfüllt ist, wenn man für m die kleinere der zwei Zahlen m und n nimmt. Man bilde nämlich den Ausdruck $a+\frac{g}{n}$, wo a irgend eine ganze positive Zahl bedeuten soll, und setze $x = a+\frac{g}{n}$; dann ist $nx = na+g$, mithin $E(nx) = na$ und $nx = E(nx)+g$; ferner ist $mx = ma+\frac{mg}{n}$. Setzt man nun $\frac{mg}{n} = h$, so ist mithin $h < 1$, und man hat $E(mx) = ma$ und $mx = E(mx)+h$, zugleich ist $gm = nh$. Die verlangten Bedingungen sind also alle erfüllt, und es folgt hieraus, dass die Gleichung $F.$ immer statt hat, wenn m und n zwei beliebige ganze Zahlen sind und g eine Zahl, die < 1 und zugleich der Bedingung $\frac{mg}{n} < 1$ Genüge leistet.

Bringt man die Gleichung

$$A.-B. = mE(nx)-nE(mx)$$

in die Form

$$nE(mx)+\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h\right) = mE(nx)+\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}+g\right),$$

wofür man also auch

$$E(mx)+\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h+E(mx)\right) = E(nx)+\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}+g+E(nx)\right)$$

schreiben kann, und setzt man in diesem letzten Ausdrucke wieder mx statt $E(mx)+h$ und nx statt $E(nx)+g$, so hat man

$$G. = \sum_{r=0}^{n-1} E\left(mx+\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=0}^{m-1} E\left(nx+\frac{sn}{m}\right).$$

In dieser Form hat Herr *Cesáro* den Satz ohne Beweis gegeben *).

Setzt man hierin $x = \frac{N}{mn}$, wo N irgend eine positive Zahl bedeutet, so hat man

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(\frac{N}{n}+\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=0}^{m-1} E\left(\frac{N}{m}+\frac{sn}{m}\right).$$

Man kann die Differenz $A.-B.$ noch in anderer Gestalt ausdrücken. Setzt man nämlich

$$x \geqq E(x)+\frac{k^{(0)}}{m}, \quad x < E(x)+\frac{k^{(0)}+1}{m},$$

$$x \geqq E(x)+\frac{l^{(0)}}{n}, \quad x < E(x)+\frac{l^{(0)}+1}{n},$$

*) Nouv. Ann. des Mathém. Déc. 1885 p. 560.

so ist

$$\sum_{s=0}^{m-1} E\left(x+\frac{s}{m}\right) = mE(x)+k^{(0)} = E(mx),$$

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(x+\frac{r}{n}\right) = nE(x)+l^{(0)} = E(nx)\ ^{*})$$

und mithin

$$n\sum_{s=0}^{m-1} E\left(x+\frac{s}{m}\right) - m\sum_{r=0}^{n-1} E\left(x+\frac{r}{n}\right) = nk^{(0)}-ml^{(0)}.$$

Setzt man ferner

$$E\left(mx+\frac{rm}{n}\right) = mE\left(x+\frac{r}{n}\right)+k_r,$$

$$E\left(nx+\frac{sn}{m}\right) = nE\left(x+\frac{s}{m}\right)+l_s$$

und

$$\Sigma k = k_0+k_1+\cdots+k_{n-1},\quad \Sigma l = l_0+l_1+\cdots+l_{n-1},$$

so folgt

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(mx+\frac{rm}{n}\right) = m\sum_{r=0}^{n-1} E\left(x+\frac{r}{n}\right)+\Sigma k = mE(nx)+\Sigma k,$$

$$\sum_{s=0}^{m-1} E\left(nx+\frac{sn}{m}\right) = n\sum_{s=0}^{m-1} E\left(x+\frac{s}{m}\right)+\Sigma l = nE(mx)+\Sigma l.$$

In Folge der Gleichung *G.* ist also

$$mE(nx)-nE(mx) = \Sigma l-\Sigma k,$$

mithin auch

$$A.-B. = \Sigma l-\Sigma k = ml^{(0)}-nk^{(0)};$$

jeder dieser Ausdrücke giebt also den Unterschied der Anzahl der vollständigen Glieder in den beiden Reihen *A.* und *B.* an.

Man betrachte jetzt die Reihen

$$H. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}-h\right),\quad J. = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-g\right),$$

indem man wieder

$$mx = E(mx)+h,\quad nx = E(nx)+g$$

setzt. Sei $E\left(\frac{lm}{n}-h\right)$ eines der Glieder der Reihe *H.*, und man setze

$$\frac{lm}{n} = E\left(\frac{lm}{n}\right)+\frac{\alpha}{n},\quad \text{also}\quad \frac{lm}{n}-h = E\left(\frac{lm}{n}\right)+\frac{\alpha}{n}-h.$$

Nun ist sowohl $\frac{\alpha}{n}$ als auch h positiv und kleiner als die Einheit. Dem-

*) Man vgl. Acta Mathem. VIII, 93.

nach wird

$$E\left(\frac{lm}{n}-h\right) = E\left(\frac{lm}{n}\right) \quad \text{oder} \quad E\left(\frac{lm}{n}\right)-1$$

sein, je nachdem $\frac{\alpha}{n}-h$ positiv (Null eingeschlossen) oder negativ ist*). Nimmt man daher an, dass $h>\frac{k}{n}$, $h<\frac{k+1}{n}$, wo wieder k eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, so ist $\frac{\alpha}{n}-h$ positiv oder negativ, je nachdem (die ganze Zahl) $\alpha>k$ oder $\alpha \overline{\lessgtr} k$ ist. Nennt man nun die Glieder, $E\left(\frac{lm}{n}-h\right)$, welche $=E\left(\frac{lm}{n}\right)-1$ sind, ***unvollständige*** Glieder, so enthält die Reihe $H.$ mithin k unvollständige Glieder, was man ebenso beweist, wie oben das Vorhandensein k vollständiger Glieder in der Reihe $A.$

Ebenso ergiebt sich, wenn man

$$\frac{ln}{m} = E\left(\frac{ln}{m}\right)+\frac{\beta}{m} \quad \text{und} \quad g>\frac{i}{m}, \quad g<\frac{i+1}{m}$$

(wo i eine ganze positive Zahl oder Null ist) nimmt, dass die Reihe $J.$ demnach i unvollständige Glieder enthält. Da nun hier wieder

$$k = E(mnx)-nE(mx), \quad i = E(mnx)-mE(nx),$$

so hat man

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}-h\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2}-k = \frac{(m-1)(n-1)}{2}+nE(mx)-E(mnx),$$

$$\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-g\right) = \frac{(m-1)(n-1)}{2}-i = \frac{(m-1)(n-1)}{2}+mE(nx)-E(mnx)$$

und

$$K. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}-h\right)-\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-g\right) = i-k = nE(mx)-mE(nx).$$

Die Zahl $k-i$ zeigt also an, wie viel unvollständige Glieder mehr in der

---

*) Gewöhnlich definirt man $E(x)$ so, dass dieser Ausdruck für *alle* (positiven oder negativen) Werthe von x, die, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, kleiner als die positive Einheit sind, verschwindet. Definirt man aber $E(x)$ als die nächst kleinere ganze Zahl zu x, x sei positiv oder negativ, und zwar mit Rücksicht auf das Vorzeichen, ***wie das im Folgenden geschehen soll,*** so ist $E(-x) = -1$, wenn $-x$ ein ächter negativer Bruch ist, und allgemein $E(-x) = -Ex-1$, wenn x positiv ist. Ist also $E\left(\frac{lm}{n}\right)=0$, d. h. $\frac{lm}{n}=\frac{\alpha}{n}$, so ist $E\left(\frac{lm}{n}-h\right)=0$ oder $=-1$, je nachdem $\frac{\alpha}{n}-h$ positiv oder negativ ist, also auch in diesem Falle

$$E\left(\frac{lm}{n}-h\right) = E\left(\frac{lm}{n}\right) \quad \text{oder} \quad E\left(\frac{lm}{n}\right)-1.$$

Reihe *H.* als in der Reihe *J.* vorkommen, und man hat wieder, wie früher,

$$k-i = nh-mg.$$

Zugleich ergiebt sich

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h\right)+\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}-h\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}+g\right)+\sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-g\right) = (m-1)(n-1).$$

Ist z. B. $m = 5$, $n = 7$, $x = \frac{9}{4}$, also $h = \frac{1}{4}$ und $g = \frac{3}{4}$, so ist

$$\sum_{r=1}^{6} E(\tfrac{5}{7}r+\tfrac{1}{4}) = 13, \quad \sum_{r=1}^{6} E(\tfrac{5}{7}r-\tfrac{1}{4}) = 11, \quad \sum_{s=1}^{4} E(\tfrac{7}{5}s+\tfrac{3}{4}) = 15,$$

$$\sum_{s=1}^{4} E(\tfrac{7}{5}s-\tfrac{3}{4}) = 9.$$

Es wurde $h > \frac{k}{n}$ und $g > \frac{i}{m}$ vorausgesetzt. Ist $h = \frac{k}{n}$, so ist das Glied $E\left(\frac{lm}{n}-h\right)$ der Reihe *H.*, bei welchem $\frac{lm}{n} = E\left(\frac{lm}{n}\right)+\frac{k}{n}$ ist, kein unvollständiges, es kommen also dann nur $k-1$ unvollständige Glieder in der Reihe vor, und man hat

$$H = \frac{(m-1)(n-1)}{2}-k+1,$$

und ebenso hat man

$$J = \frac{(m-1)(n-1)}{2}-i+1, \quad \text{wenn} \quad g = \frac{i}{m}.$$

Man sieht aber leicht, dass immer zugleich $h = \frac{k}{n}$ und $g = \frac{i}{m}$ sein muss. Denn substituirt man in $mx = E(mx)+h$ statt h seinen Werth $\frac{k}{n}$, so folgt $nmx = nE(mx)+k$; nun ist zugleich $nmx = mE(nx)+mg$, es muss also mg eine ganze Zahl sein. Die Differenz *H.*—*J.* bleibt daher wie früher $i-k$.

Setzt man $k-i = nh-mg = 0$, so enthalten die Reihen *H.* und *J.* gleich viel unvollständige Glieder. Man hat demnach, indem man $h = \frac{mg}{n}$ setzt, in diesem Falle

$$L. = \sum_{r=1}^{n-1} E\left((r-g)\frac{m}{n}\right) = \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-g\right).$$

Nun sind die Bedingungen, auf welchen diese Gleichung beruht, dieselben wie diejenigen, welche die Gleichung *F.* voraussetzt, man kann also wie dort wieder nachweisen, dass die Gleichung *K.* immer statt hat, wenn m und n zwei ganze positive Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, und g eine Zahl < 1, die der Bedingung $mg < n$ genügt.

Bedeutet r wie bisher eine der Zahlen 1, 2, ... $n-1$ und setzt man $\frac{rm}{n}=E\left(\frac{rm}{n}\right)+\alpha$, so sei zuerst $\alpha<h$, alsdann ist

$$E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)=E(mx)-E\left(E\left(\frac{rm}{n}\right)-(h-\alpha)\right)=E(mx)+1-E\left(\frac{rm}{n}\right).$$

Dagegen ist

$$E\left(E(mx)-\left(\frac{rm}{n}-h\right)\right)=E\left(E(mx)+h-\alpha-E\left(\frac{rm}{n}\right)\right)=E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}\right).$$

Ist aber $\alpha>h$, so ist

$$E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)=E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}\right)$$

und

$$E\left(E(mx)-\left(\frac{rm}{n}-h\right)\right)=E(mx)-1-E\left(\frac{rm}{n}\right).$$

In beiden Fällen ist also $E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)$ um eine Einheit grösser als $E\left(E(mx)+h-\frac{rm}{n}\right)$ oder, wenn man wieder mx statt $E(mx)+h$ setzt,

$$E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)-E\left(mx-\frac{rm}{n}\right)=1.$$

Ebenso ergiebt sich

$$E(nx)-E\left(\frac{sn}{m}-g\right)-E\left(nx-\frac{sn}{m}\right)=1,$$

wenn s eine der Zahlen 1, ... $m-1$ bedeutet.

Nimmt man, wie schon oben angedeutet wurde, wenn x einen positiven Werth bedeutet, den Werth $-E(x)-1$ als Definition von $E(-x)$, so gelten die zwei Formeln auch noch, wenn $mx-\frac{rm}{n}$ oder $nx-\frac{sn}{m}$ negativ werden. *Unter dieser Voraussetzung* hat man daher allgemein

$$M.=\sum_{r=1}^{n-1}\left(E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)\right)-\sum_{r=0}^{r=n-1}E\left(mx-\frac{rm}{n}\right)+E(mx)=n-1,$$

$$N.=\sum_{s=1}^{m-1}\left(E(nx)-E\left(\frac{sn}{m}-g\right)\right)-\sum_{s=0}^{m-1}E\left(nx-\frac{sn}{m}\right)+E(nx)=m-1.$$

Nun kann man die Gleichung K auch in folgender Gestalt schreiben

$$E(mx)+\sum_{r=1}^{n-1}\left(E(mx)-E\left(\frac{rm}{n}-h\right)\right)=E(nx)+\sum_{s=1}^{m-1}\left(E(nx)-E\left(\frac{sn}{m}-g\right)\right).$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man also, indem man die Differenz $M.-N.$ nimmt

$$O.=\sum_{r=0}^{n-1}E\left(mx-\frac{rm}{n}\right)-\sum_{s=0}^{m-1}E\left(nx-\frac{sn}{m}\right)=m-n,$$

wofür man auch

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(1+mx-\frac{rm}{n}\right) = \sum_{s=0}^{m-1} E\left(1+nx-\frac{sn}{m}\right)$$

schreiben kann.

Da nach der oben gegebenen Definition, x sei positiv oder negativ, immer $Ex = -E(-x)-1$, so hat man demnach auch

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}-mx\right) = \sum_{s=0}^{m-1} E\left(\frac{sn}{m}-nx\right).$$

Setzt man $x = \frac{N}{mn}$, wo nun N jede positive Zahl bezeichnen kann, so geht die Gleichung $O.$ in

$$\sum_{r=0}^{n-1} E\left(\frac{N}{n}-\frac{rm}{n}\right) - \sum_{s=0}^{m-1} E\left(\frac{N}{m}-\frac{sn}{m}\right) = m-n$$

über, wofür man auch

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{N}{n}-\frac{rm}{n}\right) - \sum_{s=1}^{m-1} E\left(\frac{N}{m}-\frac{sn}{m}\right) = m-n+E\left(\frac{N}{m}\right)-E\left(\frac{N}{n}\right)$$

setzen kann. Nun ist

$$\sum_{r=1}^{E\left(\frac{N}{m}\right)} E\left(\frac{N}{n}-\frac{rm}{n}\right) - \sum_{s=1}^{E\left(\frac{N}{n}\right)} E\left(\frac{N}{m}-\frac{sn}{m}\right) = 0\ ^{*}).$$

Mithin, wenn $E\left(\frac{N}{m}\right)$ zwischen 1 und $n-1$ und $E\left(\frac{N}{n}\right)$ zwischen 1 und $m-1$,

$$\sum_{r=E\left(\frac{N}{m}\right)+1}^{n-1} E\left(\frac{N-rm}{n}\right) - \sum_{s=E\left(\frac{N}{n}\right)+1}^{m-1} E\left(\frac{N-sn}{m}\right) = m-n+E\left(\frac{N}{m}\right)-E\left(\frac{N}{n}\right).$$

*) Man vgl. Bullet. des sciences mathém. Ser. 2, T. VIII, p. 255.

Bern, den 1. März 1887.

Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze.

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Breslau.)

Herr *Kronecker* hat in Vorlesungen und Abhandlungen*) das methodische Princip ausgesprochen und in wesentlichen Punkten durchgeführt, die rein arithmetisch formulirbaren Sätze der Algebra auf rein arithmetischem Wege abzuleiten, d. h. auf die Benutzung der Irrationalzahlen und überhaupt aller unendlichen Processe zu verzichten, und nur mit Begriffen zu operiren, deren Anwendbarkeit auf jeden einzelnen Fall durch eine endliche Anzahl von Versuchen entschieden werden kann; im Sinne dieser Forderung soll in der vorliegenden Abhandlung eine Reihe fundamentaler algebraischer Sätze nach neuen, rein arithmetischen Methoden bewiesen werden.

Den Ausgangspunkt bildet eine elementare Ableitung der Hauptsätze betreffend die *Galois*sche Resolvente, womit eine arithmetische Begründung der *Galois*schen Theorie der Affecte und Gruppen gewonnen wird. Diese zunächst unter Voraussetzung natürlicher Rationalitätsbereiche durchgeführten Entwickelungen ergeben sodann eine einfache Theorie des Gattungsbereiches, insbesondere einen arithmetischen Beweis des Satzes, dass mehrere algebraische Grössen stets durch eine lineare Verbindung derselben rational ausdrückbar sind.

Hieran schliesst sich, auf Grund der von Herrn *Kronecker* gegebenen Gestalt der Eliminationstheorie **), eine allgemeine Methode, jede Gleichung zwischen beliebig vielen algebraischen Grössen, auch wenn dieselben durch ein System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten definirt sind, durch

---

*) Vgl. Grundzüge einer arithmetischen Theorie etc. § 25, dieses Journal Bd. XCII S. 113. Vgl. ferner *Molk,* sur une notion etc. Chap. I, Acta Math. Bd. VI S. 2.

**) Grundzüge § 10 a. a. O. S. 27.

eine äquivalente Congruenz nach einem einzigen, durch das Gleichungssystem bestimmten Modul, und damit das Rechnen mit Irrationalitäten durch das Rechnen mit ganzen Functionen von Unbestimmten zu ersetzen. Genauer formulirt ergiebt sich das folgende Resultat. Sind beliebig viele Gleichungen $F_\nu(x_1, x_2, \dots x_m) = 0$ durch r verschiedene Werthsysteme

$$x_\mu = \xi_\mu^{(\varrho)} \qquad (\mu = 1, 2, \dots m;\ \varrho = 1, 2, \dots r)$$

und nur durch diese zu erfüllen, so giebt es r Systeme ganzer Functionen $\varphi_{\mu\varrho}$ einer Unbestimmten w, welche nach einem irreductibeln Modul $\varphi(w)$ von einander verschieden sind und den Congruenzen

$$F_\nu(\varphi_{1\varrho}(w),\ \varphi_{2\varrho}(w),\ \dots\ \varphi_{m\varrho}(w)) \equiv 0 \pmod{\varphi(w)}$$

genügen; jede Gleichung zwischen Grössen ξ geht in eine richtige Congruenz (mod. $\varphi(w)$) über, wenn man $\xi_\mu^{(\varrho)}$ durch $\varphi_{\mu\varrho}(w)$ ersetzt, und umgekehrt. Alle möglichen Moduln $\varphi(w)$ stehen in einem einfachen Zusammenhang mit einander, sodass sie alle aus einem von ihnen abgeleitet werden können.

Wenn nun auch die Tendenz dieser Entwickelungen im Allgemeinen dahin geht, die Existenz der Wurzeln für die Erledigung aller algebraischen Probleme, welche nicht mit der numerischen Auflösung der Gleichungen zusammenhängen, entbehrlich zu machen, so kann man doch die erhaltenen Resultate zur Aufstellung mannichfaltiger neuer Beweise für die Existenz der Wurzeln vom Typus des zweiten *Gauss*schen Beweises benutzen; insbesondere gelingt es, dem schönen *Euler-Lagrange*schen Existenzbeweise eine sichere Grundlage und völlig strenge Form zu geben. Dieser Beweis ist in der letzten Gestalt, wie er bei *Lagrange* *) vorliegt, nur dem dritten *Gauss*schen Einwande **) unterworfen, die „Existenz“ der Wurzeln schon zu benutzen und nur nach ihrer Form zu fragen; d. h. es wird mit Grössen im unbestimmtesten Sinne des Wortes, mit Rechnungsobjecten operirt, welche die gegebene Gleichung $m$ten Grades $F(x) = 0$ für x gesetzt erfüllen, und übrigens genau denselben Rechnungsregeln wie die gewöhnlichen Zahlen unterliegen. Solche Rechnungsobjecte können und sollen nun wirklich auf rein arithmetischem Wege hergestellt werden; die Congruenz $F(x) \equiv 0$ hat

---

*) Traité de la résolution des équations numériques (3ième édition, 1826) Note X. Oeuvres t. VIII p. 234.

**) Demonstratio nova theorematis, omnem functionem etc. Art. 8, Werke Bd. III S. 14.

nämlich bei passender Wahl eines irreductibeln Moduls stets m verschiedene rationale Wurzeln, mit denen man nach genau denselben Regeln wie mit den gewöhnlichen Zahlen rechnen kann, wenn man stets an Stelle der Gleichheit die Congruenz nach jenem Modul einführt; und mit diesen Congruenzwurzeln kann man genau diejenigen Schlussreihen entwickeln, zu welchen *Lagrange* seine von *Gauss* gerügten hypothetischen Wurzeln von unbekannter Gestalt gebraucht.

Als bekannt werden nur die elementaren Sätze betreffend die natürlichen Rationalitätsbereiche und die Zerlegung ganzer Functionen in solchen Bereichen *) vorausgesetzt.

I.

Arithmetische Theorie der *Galois*schen Resolvente.

1. Die Unbestimmten $x_1, x_2, \dots x_m$ seien die Wurzeln der Gleichung

$$(1.)\qquad \mathfrak{F}(x) = x^m - f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m f_m = 0;$$

$D(f)$ sei die Discriminante dieser Gleichung und $\Delta_0(f)$ die Discriminante der im Bereich der symmetrischen Functionen f irreductibeln Gleichung, welcher die Grösse

$$y = x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_m t^m,$$

in welcher t eine neue Unbestimmte bedeutet, genügt. Dann ist $\Delta_0(f)$ das Product aller Differenzen

$$(2.)\qquad \sum_{\nu}^{1,m} x_{\alpha_\nu} t^\nu - \sum_{\nu}^{1,m} x_{\beta_\nu} t^\nu = t^\varrho \{(x_{\alpha_\varrho} - x_{\beta_\varrho}) + tT\},$$

wobei ϱ der kleinste Index ist, für welchen die Differenz $\alpha_\varrho - \beta_\varrho$ von Null verschieden wird, und T eine ganze Function von t und den Unbestimmten x_ν bedeutet; also, da $\Delta_0(f)$ eine symmetrische Function der Grössen x_ν ist,

$$(3.)\qquad \Delta_0(f) = t^{\Sigma\varrho} . \Delta_1(t, f),$$

wenn unter Δ_1 eine ganze Function von $t, f_1, f_2, \dots f_m$ verstanden wird; dann lehrt die Formel (2.), dass der in den Grössen x_ν symmetrische Ausdruck $\Delta_1(0, f)$ aus Differenzen $x_\alpha - x_\beta$ multiplicativ zusammengesetzt, also eine Potenz von $D(f)$ sein muss:

$$(4.)\qquad \Delta_1(0, f) = (D(f))^\sigma.$$

Jetzt sei eine beliebige Gleichung $m$ten Grades

$$(5.)\qquad F(x) = x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m a_m = 0$$

*) Vgl. Grundzüge §§ 3 und 4, a. a. O. S. 7 ff.



gegeben, deren Coefficienten einem natürlichen Rationalitätsbereich ($\mathfrak{R}$) angehören, und deren Discriminante $D(a)$ von Null verschieden ist; dann ergeben die Gleichungen (3.) und (4.) auf Grund eines bekannten Satzes von *Gauss* *) die Formeln:

$$(6.)\quad \Delta_0(a) = t^{\Sigma\varrho}\Delta_1(t,\, a),$$

$$(7.)\quad \Delta_1(0,\, a) = (D(a))^{\varrho},$$

wo $\Delta_0(a)$ und $\Delta_1(t, a)$ aus $\Delta_0(f)$ und $\Delta_1(t, f)$ entsteht, indem man f_ν durch a_ν ersetzt. Aus der Gleichung (7.) folgt, dass $\Delta_1(t, a)$, als ganze Function von t betrachtet, nicht identisch verschwinden kann, und dasselbe gilt nach (6.) von $\Delta_0(a)$; man kann also die Unbestimmte t derartig specialisiren, dass $\Delta_0(a)$ von Null verschieden bleibt.

Beiläufig bemerkt gilt derselbe Beweis für den Ausdruck $\Delta'(a)$, der aus dem Differenzenproduct

$$\Delta'(f) = \prod_{\alpha,\beta}\left\{\sum_{\nu}^{1,m'} x_{\alpha_\nu} t^{\nu} - \sum_{\nu}^{1,m'} x_{\beta_\nu} t^{\nu}\right\} \qquad (m' < m)$$

entsteht, indem man a_ν für f_ν schreibt; auch $\Delta'(a)$ ist bei passenden Werthen der Grösse t von Null verschieden.

2. Die Grösse y ist ein specieller Fall der allgemeineren mit unbestimmten Coefficienten u_ν gebildeten

$$z = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_mx_m,$$

welche der im Bereich der Grössen f irreductibeln Gleichung

$$(8.)\quad G(z,\, f) = 0$$

genügen möge; ist $\Delta(f)$ die Discriminante derselben, so kann $\Delta(a)$ nicht identisch verschwinden, weil diese Grösse für $u_\nu = t^\nu$ in die nach Art. 1 nicht identisch verschwindende Grösse $\Delta_0(a)$ übergeht. Die Gleichung (8.) ist nun eine rein algebraische Identität zwischen den Unbestimmten x_ν, u_ν, z, kann also differentiirt werden:

$$\frac{\partial z}{\partial u_\nu} = x_\nu = -\frac{\partial G(z, f)}{\partial u_\nu} : \frac{\partial G(z, f)}{\partial z}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit einem passenden Factor multiplicirt und unter γ_ν ganze rationale ganzzahlige Functionen versteht,

$$x_\nu = \frac{\gamma_\nu(z, u, f)}{\Delta(f)} = \varphi_\nu(z,\, f) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m).$$

---

*) Vgl. Demonstratio nova altera theorematis, omnem functionem etc. Art. 5, Werke Bd. III S. 37.

Dann ist, da die Grösse x_ν der Gleichung (1.) genügt,

$$\mathfrak{F}(\varphi_\nu(z,\ f)) = 0,$$

und diese Gleichung besteht wegen der Irreductibilität der Gleichung (8.) auch dann noch, wenn z eine beliebige Wurzel der Gleichung (8.) bedeutet: ist also w eine neue Unbestimmte, so folgt

$$(9.)\qquad \mathfrak{F}(\varphi_\nu(w,\ f)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ G(w,\ f)),$$

wobei von Nennern, welche die Grösse w nicht enthalten, abgesehen ist. Hieraus folgt nach dem in Art. 1 citirten *Gauss*schen Satze

$$(10.)\qquad F(\varphi_\nu(w,\ a)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ G(w,\ a));$$

denn in der Congruenz (9.) kann ohne weiteres f_ν durch a_ν ersetzt werden, weil dabei der einzige vorkommende Nenner $\varDelta(f)$ den von Null verschiedenen Werth $\varDelta(a)$ annimmt. Ist also $g(w,\ a)$ ein beliebiger irreductibler Factor von $G(z, a)$, so folgt aus (10.), wenn hier wie im Folgenden von Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R})$ als Nennern abgesehen wird:

$$F(\varphi_\nu(w,\ a)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ g(w,\ a)),$$

also

$$\left.\begin{array}{r} F(x) \equiv F(x) - F(\varphi_1(w,\ a)) \equiv (x - \varphi_1(w,\ a))\bar{F}(x) \\ F(\varphi_2(w,\ a)) \equiv (\varphi_2(w,\ a) - \varphi_1(w,\ a))\bar{F}(\varphi_2(w,\ a)) \equiv 0 \end{array}\right\} \ (\text{mod.}\ g(w, a)).$$

Da nun der Modul $g(w, a)$ irreductibel ist, so muss einer der Factoren des Products

$$(11.)\qquad (\varphi_2(w,\ a) - \varphi_1(w,\ a))\bar{F}(\varphi_2(w,\ a))$$

durch $g(w, a)$ theilbar sein. Für den ersten Factor kann dies nicht eintreten; denn es ist

$$D(f) = \prod_{\alpha,\beta}(x_\alpha - x_\beta) = \prod_{\alpha,\beta}\{\varphi_\alpha(z,\ f) - \varphi_\beta(z,\ f)\},$$

also wegen der Irreductibilität der Gleichung (8.)

$$D(f) \equiv \prod_{\alpha,\beta}\{\varphi_\alpha(w,\ f) - \varphi_\beta(w,\ f)\} \quad (\text{mod.}\ G(w,\ f)),$$

also nach dem citirten *Gauss*schen Satze

$$D(a) \equiv \prod_{\alpha,\beta}(\varphi_\alpha(w,\ a) - \varphi_\beta(w,\ a)) \quad (\text{mod.}\ G(w,\ a)),$$

also *a fortiori*

$$D(a) \equiv \prod_{\alpha,\beta}(\varphi_\alpha(w,\ a) - \varphi_\beta(w,\ a)) \quad (\text{mod.}\ g(w,\ a)),$$

woraus sich sofort ergiebt, dass keine der Differenzen

$$\varphi_\alpha(w,\ a) - \varphi_\beta(w,\ a) \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

durch $g(w, a)$ theilbar sein kann, dass also in dem Product (11.) der zweite Factor durch $g(w, a)$ theilbar sein muss. Daraus folgt, dass man setzen kann

$$\left.\begin{array}{l}\bar{F}(x) \equiv (x-\varphi_2(w, a))\bar{F}_1(x), \\ F(x) \equiv (x-\varphi_1(w, a))(x-\varphi_2(w, a))\bar{F}_1(x)\end{array}\right\} \pmod{g(w, a)},$$

wobei $\bar{F}_1$ eine ganze Function $(m-2)$ten Grades von x bedeutet; in ähnlicher Weise fortschliessend erhält man das Resultat

$$(12.) \qquad F(x) \equiv \prod_{\nu}^{1,m}(x-\varphi_\nu(w, a)) \pmod{g(w, a)}.$$

Vergleicht man hierbei die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, so ergiebt sich

$$a_\varrho \equiv \sum_{(\alpha)} \varphi_{\alpha_1}(w, a)\varphi_{\alpha_2}(w, a)\ldots\varphi_{\alpha_\varrho}(w, a) \pmod{g(w, a)},$$

wobei rechts über die Indices α in der zur Bildung der elementaren symmetrischen Functionen nöthigen Weise zu summiren ist. Jede beliebige symmetrische Function der m Grössen $\varphi_\nu(w, a)$ ist also nach dem Modul $g(w, a)$ einer dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehörigen, also von w freien Grösse congruent.

Beiläufig ist aus der Irreductibilität des Moduls und der Congruenz (12.) ersichtlich, dass die Congruenz

$$F(x) \equiv 0 \pmod{g(w, a)}$$

nicht mehr als die m Wurzeln $\varphi_\nu(w, a)$ besitzen kann.

3. Aus den Gleichungen

$$x_\nu = \frac{\gamma_\nu(z, f)}{\Delta(f)}$$

ergiebt sich, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $G(z, f) = 0$ durch z rational mit dem einzigen Nenner $\Delta(f)$ ausgedrückt werden können; diese Wurzeln seien, indem $m! = M$ gesetzt wird,

$$z = \theta_0(z, f), \quad \theta_1(z, f), \quad \theta_2(z, f), \quad \ldots \quad \theta_{M-1}(z, f),$$

sodass die Gleichungen

$$G(\theta_\nu(z, f)) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, M-1),$$

also wegen der Irreductibilität der Gleichung $G(z, f) = 0$ auch die Congruenzen

$$G(\theta_\nu(w, f)) \equiv 0 \pmod{G(w, f)}$$

bestehen, aus welchen nach der für die Gleichung (12.) angewandten Beweismethode folgt:

$$G(x,\ f) \equiv \prod_{\nu}^{0,\ M-1} (x - \theta_\nu(w,\ f)) \quad (\text{mod. } G(w,\ f)).$$

Hierin kann nach dem citirten *Gauss*schen Satze f_ν durch a_ν ersetzt werden, weil der einzige vorkommende Nenner $\varDelta(f)$ den von Null verschiedenen Werth $\varDelta(a)$ annimmt; also ist

$$G(x,\ a) \equiv \prod_{\nu}^{0,\ M-1} (x - \theta_\nu(w,\ a)) \quad (\text{mod. } G(w,\ a))$$

und *a fortiori*

$$G(x,\ a) \equiv \prod_{\nu}^{0,\ M-1} (x - \theta_\nu(w,\ a)) \quad (\text{mod. } g(w,\ a)).$$

Dabei sind die Ausdrücke $\theta_\nu(w, a)$ nach dem Modul $g(w, a)$ einander incongruent; denn aus der Gleichung

$$\varDelta(f) = \prod_{\alpha,\beta} (\theta_\alpha(z,\ f) - \theta_\beta(z,\ f))$$

folgt, weil die Gleichung $G(x, f) = 0$ irreductibel ist, die Congruenz

$$\varDelta(f) \equiv \prod_{\alpha,\beta} (\theta_\alpha(w,\ f) - \theta_\beta(w,\ f)) \quad (\text{mod. } G(w,\ f)),$$

also nach dem *Gauss*schen Satze

$$\varDelta(a) \equiv \prod_{\alpha,\beta} (\theta_\alpha(w,\ a) - \theta_\beta(w,\ a)) \quad (\text{mod. } G(w,\ a));$$

und hieraus folgt

$$\varDelta(a) \equiv \prod_{\alpha,\beta} (\theta_\alpha(w,\ a) - \theta_\beta(w,\ a)) \quad (\text{mod. } g(w,\ a)),$$

sodass, da $\varDelta(a)$ von Null verschieden ist, keiner der Factoren der rechten Seite durch $g(w, a)$ theilbar sein kann. Die Congruenz

$$(13.) \qquad G(x,\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod. } g(w,\ a))$$

mit der Unbekannten x hat also genau so viel incongruente Wurzeln, wie ihr Grad angiebt. Dasselbe gilt von der Congruenz

$$(14.) \qquad g_1(x,\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod. } g(w,\ a)),$$

wenn $g_1(x, a)$ ein beliebiger irreductibler Factor von $G(x, a)$ ist. Denn bei der Irreductibilität des Moduls muss jede Wurzel der Congruenz (13.) für x gesetzt mindestens einen der irreductiblen Factoren von $G(x, a)$ durch $g(w, a)$ theilbar machen; hätte nun die Congruenz (14.) weniger Wurzeln, als ihr Grad angiebt, so müsste ein von g_1 verschiedener Factor von $G(x, a)$ für mehr Werthe x, als sein Grad angiebt, durch $g(w, a)$ theilbar sein, was wiederum mit Rücksicht auf die Irreductibilität von $g(w, a)$ nach der bei der Congruenz (12.) angewandten Methode als unmöglich nachgewiesen

werden kann. Speciell hat also die Congruenz

$$g(x,\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a))$$

genau r Wurzeln, wenn $g(x, a)$ in Bezug auf x vom Grade r ist; eine dieser Wurzeln ist offenbar

$$x = w = \theta_0(w,\ a);$$

die übrigen seien, was durch passende Wahl der Indices erreicht wird, $\theta_1(w, a)$, $\theta_2(w, a)$, $\dots$ $\theta_{r-1}(w, a)$. Hieraus folgt nach der bei (12.) angewandten Methode

$$g(x,\ a) \equiv \prod_{\nu}^{0, r-1} (x - \theta_\nu(w,\ a)) \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a)).$$

Jede ganze symmetrische Function der Grössen

$$(15.) \qquad \theta_0(w,\ a), \quad \theta_1(w,\ a), \quad \dots \quad \theta_{r-1}(w,\ a),$$

speciell jede ganze Function von w, welche den Congruenzen

$$(16.) \qquad \psi(w) \equiv \psi(\theta_\varrho(w,\ a)) \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a)) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, r-1)$$

genügt, ist also einer Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R})$, also einer von w unabhängigen Grösse nach dem Modul $g(w, a)$ congruent. Umgekehrt, wenn die ganze Function $\psi(w)$ einer Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R})$ congruent ist,

$$\psi(w) \equiv \mathfrak{R} \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a)),$$

so kann man in dieser Congruenz die Unbestimmte w durch $\theta_\varrho(w, a)$ ersetzen:

$$\psi(\theta_\varrho(w,\ a)) \equiv \mathfrak{R} \quad (\text{mod.}\, g(\theta_\varrho(w,\ a),\ a)),$$

also ist für $\varrho = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ r-1$

$$\psi(\theta_\varrho(w,\ a)) \equiv \mathfrak{R} \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a));$$

die Grösse $\psi(w)$ genügt also den Congruenzen (16.).

4. Versteht man ein für alle Mal unter θ_ϱ oder $\theta_\varrho(w)$ eine der Grössen (15.), und lässt bei Anhäufung mehrerer Functionszeichen φ, ψ, θ die Klammern fort, so kann zu jedem Paar von Zahlen α, β der Reihe $0,\ 1,\ \dots,\ r-1$ eine dritte Zahl γ derselben Reihe gefunden werden, sodass die Congruenz

$$(17.) \qquad \theta_\alpha \theta_\beta(w) \equiv \theta_\gamma(w) \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a))$$

besteht. Denn ersetzt man in der Congruenz

$$g(\theta_\alpha(w),\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a))$$

die Unbestimmte w durch $\theta_\beta(w)$, so ergiebt sich

$$g(\theta_\alpha \theta_\beta(w),\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, g(\theta_\beta(w),\ a)),$$

also auch

$$g(\theta_\alpha \theta_\beta(w),\ a) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, g(w,\ a));$$

da nun $g(x, a)$ nur, wenn man für x eine der Grössen (15.) setzt, durch $g(w, a)$ theilbar wird, so muss in der That eine Congruenz von der Gestalt (17.) bestehen. Die Functionszeichen θ_ϱ bilden also eine *Gruppe*. Hieraus folgt sofort in bekannter Weise, dass jedes derselben bei fortgesetzter Iteration eine bestimmte Periode zeigt, und dass es zu jedem Zeichen θ_ϱ ein reciprokes $\theta_\sigma = \theta_\varrho^{-1}$ in der Reihe der Zeichen (15.) giebt, sodass

$$\theta_\varrho \theta_\varrho^{-1}(w) \equiv w \equiv \theta_0(w) \quad (\text{mod.}\, g(w, a)).$$

Diese Gruppe ist nun mit der für gewöhnlich so genannten Gruppe der Gleichung $F(x) = 0$ holoedrisch isomorph. Denn ersetzt man in der Congruenz (12.) die Unbestimmte w durch $\theta_\varrho(w)$, und schreibt kurz $\varphi_\nu(w)$ für $\varphi_\nu(w, a)$, so ergiebt sich

$$F(x) \equiv \prod_\nu^{1,m} (x - \varphi_\nu \theta_\varrho(w)) \quad (\text{mod.}\, g(\theta_\varrho(w), a))$$

also auch

$$F(x) \equiv \prod_\nu^{1,m} (x - \varphi_\nu \theta_\varrho(w)) \quad (\text{mod.}\, g(w, a));$$

da nun aber nach Art. 2 die Congruenz

$$F(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, g(w, a))$$

nur die Wurzeln $\varphi_\nu(w)$ besitzt, so kann zu jedem Index α ein derartiger Index β gefunden werden, dass die Congruenz

$$\varphi_\alpha \theta_\varrho(w) \equiv \varphi_\beta(w) \quad (\text{mod.}\, g(w, a))$$

besteht; dabei kann keine Congruenz

$$\varphi_\alpha \theta_\varrho(w) \equiv \varphi_\gamma \theta_\varrho(w) \quad (\text{mod.}\, g(w, a))$$

bestehen, da aus ihr, wenn man die Unbestimmte w durch $\theta_\varrho^{-1}(w)$ ersetzte, die Congruenzen

$$\varphi_\alpha(w) \equiv \varphi_\gamma(w) \quad (\text{mod.}\, g(\theta_\varrho^{-1}(w), a)),$$

$$\varphi_\alpha(w) \equiv \varphi_\gamma(w) \quad (\text{mod.}\, g(w, a))$$

folgen würden, deren letztere nach Art. 2 unrichtig ist. Die m Grössen $\varphi_\nu \theta_\varrho(w)$ sind also, wenn man sie nach dem Modul $g(w, a)$ betrachtet, eine Permutation der m Grössen $\varphi_\nu(w)$, sodass zu jedem Functionszeichen θ_ϱ eine Umsetzung der m Grössen φ_ν gehört. Dabei sei z. B.

$$(18.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\nu \theta_\varrho(w) \equiv \varphi_{h_\nu}(w), \\ \varphi_\nu \theta_\sigma(w) \equiv \varphi_{i_\nu}(w) \end{array} \right\} \quad (\text{mod.}\, g(w, a));$$

dann ist offenbar

$$\varphi_\nu \theta_\varrho \theta_\sigma(w) \equiv \varphi_{h_\nu} \theta_\sigma(w) \quad (\text{mod.}\, g(\theta_\sigma(w), a)),$$

also auch

$$(19.)\qquad \varphi_\nu\theta_\varrho\theta_\sigma(w) \equiv \varphi_{h_\nu}\theta_\sigma(w) \equiv \varphi_{i_{h_\nu}}(w) \quad (\text{mod.}\, g(w,\; a)),$$

und ebenso ergiebt sich

$$(19^a.)\qquad \varphi_\nu\theta_\sigma\theta_\varrho(w) \equiv \varphi_{i_\nu}\theta_\varrho(w) \equiv \varphi_{h_{i_\nu}}(w) \quad (\text{mod.}\, g(w,\; a)).$$

Die Permutation der Grössen φ_ν, welche zu dem Ausdrucke $\theta_\varrho\theta_\sigma(w)$ gehört, ist also das Product der zu den Ausdrücken θ_ϱ und θ_σ gehörenden nach Maassgabe der Congruenzen (19.) und (19^a.). Die sämmtlichen nach dem Schema der Congruenzen (18.) erhaltenen Permutationen bilden also eine Gruppe, welche infolge der Congruenzen (19.) und (19^a.) auf die Gruppe der Functionszeichen θ_ϱ derartig isomorph bezogen ist, dass zu jedem dieser Zeichen eine bestimmte Permutation gehört *).

Umgekehrt führen zwei verschiedene Operationen θ_ϱ stets zu zwei verschiedenen Permutationen. Denn nimmt man an, es sei

$$\varphi_\nu(\theta_\varrho(w)) \equiv \varphi_\nu(\theta_\sigma(w)) \quad (\text{mod.}\; g(w,a)) \qquad (\nu=1,2,\dots m),$$

so folgt, indem man w durch $\theta_\varrho^{-1}(w)$ ersetzt,

$$\varphi_\nu(w) \equiv \varphi_\nu\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}(w) \quad (\text{mod.}\; g(w,a)),$$

und $\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}$ ist von θ_0 verschieden; es sei etwa

$$\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}(w) \equiv \theta_\tau(w) \quad (\text{mod.}\; g(w,a));$$

dann wäre

$$\varphi_\nu(w) \equiv \varphi_\nu\theta_\tau(w) \quad (\text{mod.}\; g(w,a)) \qquad (\nu=1,2,\dots m).$$

Nun war aber gesetzt

$$\begin{aligned} z &= u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_mx_m \\ &= u_1\varphi_1(z,f)+u_2\varphi_2(z,f)+\dots+u_m\varphi_m(z,f); \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$(20.)\qquad \begin{cases} w \equiv \sum\limits_\nu^{1,m} u_\nu\varphi_\nu(w,f) & (\text{mod.}\; G(w,f)), \\ w \equiv \sum\limits_\nu^{1,m} u_\nu\varphi_\nu(w,a) & (\text{mod.}\; G(w,a)), \\ w \equiv \sum\limits_\nu^{1,m} u_\nu\varphi_\nu(w) & (\text{mod.}\; g(w,a)), \end{cases}$$

also indem man w durch $\theta_\tau(w)$ ersetzt,

---

*) Ohne die arithmetische Begründung, welche das Hauptziel unsrer Entwicklungen bildet, benutzt Herr *Bachmann* die Functionen θ zur Erklärung der Gruppe einer Gleichung Math. Ann. Bd. XVIII S. 454.

$$[illegible]$$

[illegible] $\equiv$ [illegible], so ergeben die beiden letzten Congruenzen

$$[illegible]$$

was nach [illegible] unmöglich ist. Die durch die Congruenzen [illegible] definirte Permutationsgruppe ist also nur die Gruppe der Operationszeichen θ, [illegible] und beide Gruppen sind nach [illegible] und [illegible] isomorph; sie sind also [illegible].

Dass die in [illegible] definirte Gruppe mit der gewöhnlich so genannten Gruppe der Gleichung $F(z) = 0$ identisch ist, sieht man sofort, indem man eine beliebige Wurzel u der Congruenz [illegible] $= 0$ [illegible], wobei dann die übrigen Wurzeln dieser Congruenz die Werte [illegible] und die Wurzeln [illegible] der Gleichung $F(z) = 0$ die Ausdrücke [illegible] erhalten; dann ergeben die Gleichungen

$$[illegible]$$

genau die ursprüngliche Galois'sche Definition* der Gruppe der Substitutionen [illegible] welche den Affect der gegebenen Gleichung $F(z) = 0$ im Rationalitätsbereich [illegible] charakterisirt.

[illegible] Wie zur Begründung des Affectbegriffs [illegible] können die rationalen Congruenzwurzeln [illegible] als Ersatz der irrationalen Gleichungswurzeln [illegible] benutzt werden, um die arithmetisch formulirten Sätze betreffend die rationalen Functionen der Grössen [illegible] zu beweisen; insbesondere ihre Einteilung in Gattungen und den Einfluss der Adjunction solcher Gattungen auf den Affect der gegebenen Gleichung [illegible].

Eine beliebige ganze Function von [illegible] genügt den Congruenzen

$$[illegible]$$

und keiner weiteren von derselben Gestalt; denn es ist offenbar

$$[illegible]$$

also auch

$$[illegible]$$

[illegible] unter den in [illegible] auftretenden Functionszeichen θ kommt auch das zusammengesetzte Zeichen [illegible] wie diese Functionszeichen [illegible] oder, wie

* [illegible] Journal de mathématiques [illegible] XI, p. [illegible].

kürzer gesagt werden kann und soll, die Substitutionen θ, welche $\psi(w)$ ungeändert lassen — selbstverständlich nach dem Modul $g(w, a)$ —, bilden eine Gruppe. Kommt in dieser Gruppe z. B. θ_ϱ nicht vor, so ist

$$(22.)\qquad \psi\theta_\varrho(w) \equiv \psi\theta_\alpha\theta_\varrho(w) \equiv \psi\theta_\beta\theta_\varrho(w) \equiv \cdots \equiv \psi\theta_\lambda\theta_\varrho(w) \quad (\text{mod. } g(w, a))$$

ein „conjugirter" Werth von $\psi(w)$, welcher dieser Grösse nach dem stets angewandten Modul incongruent ist; dabei stehen in (22.) alle conjugirten Werthe von $\psi(w)$, welche mit $\psi\theta_\varrho(w)$ congruent sind; denn wäre etwa:

$$\psi\theta_\varrho(w) \equiv \psi\theta_\sigma(w) \quad (\text{mod. } g(w, a)),$$

so ergäbe sich, indem man w durch $\theta_\varrho^{-1}(w)$ ersetzt,

$$\psi(w) \equiv \psi\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}(w) \quad (\text{mod. } g(\theta_\varrho^{-1}(w), a)),$$

$$\psi(w) \equiv \psi\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}(w) \quad (\text{mod. } g(w, a)),$$

also müsste die Substitution $\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}$ die Grösse ψ nicht ändern, und es wäre z. B.

$$\theta_\sigma\theta_\varrho^{-1}(w) \equiv \theta_\beta(w) \qquad (\text{mod. } g(w, a)),$$

$$\theta_\sigma(w) \equiv \theta_\beta\theta_\varrho(w) \quad (\text{mod. } g(\theta_\varrho(w), a)),$$

$$\theta_\sigma(w) \equiv \theta_\beta\theta_\varrho(w) \quad (\text{mod. } g(w, a)).$$

Ist also s die Anzahl der Substitutionen θ_0, θ_α, θ_β, ... θ_λ, so werden je s der r Werthe $\psi\theta_\varrho(w)$ einander congruent, und t ist die Anzahl der incongruenten conjugirten Werthe der Grösse $\psi(w)$ diese selbst miteinbegriffen, wenn $r = st$ gesetzt wird. — Sind solche t conjugirte Werthe etwa

$$(23.)\quad \psi\theta_{\varrho_0}(w),\quad \psi\theta_{\varrho_1}(w),\quad \psi\theta_{\varrho_2}(w),\quad \ldots\quad \psi\theta_{\varrho_{t-1}}(w);\quad \theta_{\varrho_0}(w) = w,$$

so ist eine symmetrische Function derselben nach dem Modul $g(w, a)$ einer von w unabhängigen Grösse congruent; denn jede der r Substitutionen θ kann höchstens diese t Werthe unter einander vertauschen, lässt also die symmetrische Function, abgesehen von Vielfachen des Moduls, ungeändert, woraus die Behauptung nach dem Schlussresultat des Art. 3 folgt. Die Grössen (23.) sind also die Wurzeln einer Congruenz $t$ten Grades, deren Coefficienten die Grösse w nicht enthalten; ist diese Congruenz etwa

$$\Psi(\psi) \equiv 0 \quad (\text{mod. } g(w, a)),$$

so ist die Discriminante der Gleichung $\Psi(x) = 0$ dem Differenzenproduct der Grössen (23.) congruent, also sicher von Null verschieden, weil sonst infolge der Irreductibilität des Moduls eine Differenz zweier Grössen (23.) durch $g(w, a)$ theilbar sein müsste, was nach Voraussetzung nicht der Fall

ist. Hieraus folgt, dass jede den Relationen

$$\chi(w) \equiv \chi\theta_\alpha(w) \equiv \chi\theta_\beta(w) \equiv \cdots \equiv \chi\theta_\lambda(w) \quad (\mathrm{mod.}\, g(w, a))$$

genügende ganze Function $\chi(w)$, bei welcher offenbar jeder conjugirte Werth einer der Grössen $\chi\theta_{\varrho_\nu}(w)$ congruent ist, einer ganzen Function von $\psi(w)$, deren Coefficienten von w unabhängig sind, nach dem Modul $g(w, a)$ congruent gesetzt werden kann; man braucht nur nach *Lagrange* *) aus den Congruenzen

$$\sum_\nu^{0,r-1} \chi\theta_\nu(w)(\psi\theta_\nu(w))^\mu \equiv \sum_\nu^{0,t-1} s\chi\theta_{\varrho_\nu}(w)(\psi\theta_{\varrho_\nu}(w))^\mu \equiv \Re_\mu$$
$$(\mathrm{mod.}\, g(w, a)) \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, t-1),$$

deren rechte Seiten dem Schlussresultat des Art. 3 zufolge von w unabhängige Grössen des Bereichs $(\Re)$ sind, die Unbekannte $\chi(w)$ zu bestimmen.

Wenn umgekehrt eine beliebige in der Gesammtgruppe der r Substitutionen θ_ϱ enthaltene Untergruppe θ_0, θ_α, θ_β, $\ldots$ θ_λ gegeben ist, so kann leicht eine bei diesen und nur diesen Substitutionen $(\mathrm{mod.}\, g(w, a))$ ungeändert bleibende ganze Function von w gebildet werden, z. B.

$$\psi(w) = (u-w)(u-\theta_\alpha(w))(u-\theta_\beta(w))\cdots(u-\theta_\lambda(w))$$

worin u eine Unbestimmte bedeutet; denn da die Substitutionen θ_0, θ_α, $\ldots$ θ_λ eine Gruppe bilden, so ist z. B.

$$\psi\theta_\alpha(w) = (u-\theta_\alpha(w))(u-\theta_\alpha\theta_\alpha(w))(u-\theta_\beta\theta_\alpha(w))\ldots(u-\theta_\lambda\theta_\alpha(w)) \equiv \psi(w)$$
$$(\mathrm{mod.}\, g(w, a));$$

wäre nun auch noch

$$\psi(w) \equiv \psi\theta_\varrho(w) \quad (\mathrm{mod.}\, g(w, a)),$$

so ergäbe sich

$$(u-w)(u-\theta_\alpha(w))\ldots(u-\theta_\lambda(w)) \equiv (u-\theta_\varrho(w))(u-\theta_\alpha\theta_\varrho(w))\ldots(u-\theta_\lambda\theta_\varrho(w)),$$

also, da die rechte Seite für $u = \theta_\varrho(w)$ durch $g(w, a)$ theilbar wird:

$$(\theta_\varrho(w)-w)(\theta_\varrho(w)-\theta_\alpha(w))\ldots(\theta_\varrho(w)-\theta_\lambda(w)) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, g(w, a)),$$

was wegen der Irreductibilität des Moduls nur möglich ist, wenn ϱ unter den Zahlen 0, α, β, $\ldots$ λ vorkommt. Die Discriminante der wie oben gebildeten Gleichung $\Psi(x) = 0$ ist also von Null verschieden, auch wenn diese specielle Grösse $\psi(w)$ zu Grunde gelegt wird.

---

*) Vgl. Réflexions sur la résolution algébrique des équations Art. 100. Oeuvres t. III p. 374.

Der beliebigen Untergruppe $\theta_0, \theta_a, \dots \theta_\lambda$ entspricht eine beliebige in der Affectgruppe der Gleichung $F(x) = 0$ enthaltene Untergruppe $s$ter Ordnung, deren Substitutionen diejenigen sind, welche die irrationale Grösse

$$\psi(\xi) = \psi(u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_m\xi_m)$$

ungeändert lassen; diese Grösse genügt offenbar der Gleichung $\Psi(x) = 0$, ist also von ihren sämmtlichen conjugirten Werthen verschieden. Damit erhält man den auf arithmetischem Wege zuerst von Herrn *Kronecker* *) bewiesenen Satz,

> dass in jeder Gattung von rationalen Functionen der Wurzeln einer beliebig gegebenen Gleichung solche Functionen, welche von ihren sämmtlichen Conjugirten verschieden sind, gefunden werden können.

Dieser Satz ist beim Gebrauch der irrationalen Gleichungswurzeln nöthig zur Ausschliessung des Falles, dass die Gruppe der Substitutionen, welche die Form einer rationalen Function der Wurzeln nicht ändern, von der Gruppe derjenigen, welche den numerischen Werth nicht ändern, verschieden ist. Ein derartiger Unterschied tritt bei der hier gegebenen Behandlung der Congruenzwurzeln offenbar nicht auf.

Beiläufig mag noch bemerkt werden, dass infolge der Congruenz (20.) jede ganze Function von w auch als ganze Function der m Congruenzwurzeln $\varphi_\nu(w)$ aufgefasst werden kann.

II.

Elementare Theorie des Gattungsbereichs.

6. Um die bisherigen, auf einen natürlichen Rationalitätsbereich bezüglichen Entwickelungen auf Gattungsbereiche ausdehnen zu können, muss vor Allem der für den Begriff des Gattungsbereichs fundamentale Satz, dass die Adjunction mehrerer algebraischer Grössen stets durch die Adjunction einer einzigen, und zwar einer linearen Verbindung der ersteren Grössen ersetzt werden kann, in arithmetischer Form und nach arithmetischer Methode bewiesen werden; dazu bedarf es zunächst der einfachsten Sätze über enthaltene und enthaltende Gattungen.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen möge $F(x)$ im

*) Vgl. Grundzüge § 12. A. a. O. S. 42.

Bereich $(\mathfrak{R})$ als irreductibel vorausgesetzt werden; ist dann $\varphi_1(w)$ eine beliebige der m Congruenzwurzeln $\varphi_\nu(w)$, so lässt sich zeigen, dass der Ausdruck $\varphi_1\theta_\varrho(w)$ jeder der m Grössen $\varphi_\nu(w)$ nach dem Modul $g(w, a)$ congruent werden muss, wenn man dem Index ϱ successive alle Werthe $0, 1, 2, \dots, r-1$ beilegt. Denn würde der Ausdruck $\varphi_1\theta_\varrho(w)$ z. B. nur den Grössen $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots \varphi_n(w)$, wo $n < m$ zu nehmen ist, congruent, so wäre jede symmetrische Function dieser n Grössen sowie auch jede symmetrische Function der Grössen $\varphi_{n+1}(w), \varphi_{n+2}(w), \dots \varphi_m(w)$ bei allen r Substitutionen θ_ϱ bis auf Vielfache von $g(w, a)$ unveränderlich, also nach Art. 3 einer Grösse des Bereichs $(\mathfrak{R})$ congruent; also wäre

$$\left.\begin{aligned} F(x) &\equiv F(x)_1 . F(x)_2, \\ F(x)_1 &\equiv \prod_\nu^{1,n} (x-\varphi_\nu(w)), \\ F(x)_2 &\equiv \prod_\nu^{n+1,m} (x-\varphi_\nu(w)) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } g(w, a)),$$

und die Coefficienten in $F(x)_1$ und $F(x)_2$ gehörten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ an; da nun aber zwei Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R})$ nur dann nach dem Modul $g(w, a)$ congruent sein können, wenn sie gleich sind, so ergäbe sich

$$F(x) = F(x)_1 F(x)_2,$$

entgegen der vorausgesetzten Irreductibilität von $F(x)$.

Jetzt sei $f(x)$ eine beliebige ganze Function von x mit Coefficienten aus dem Bereich $(\mathfrak{R})$, und

$$(24.) \qquad \Phi(f(x)) \equiv 0 \quad (\text{mod. } F(x));$$

sodass in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise eine Wurzel der Gleichung $\Phi(x) = 0$ unter einer der durch $F(x) = 0$ definirten conjugirten Gattungen enthalten ist. Ersetzt man dann in (24.) die Unbestimmte x durch $\varphi_1(w)$, so ergiebt sich

$$\Phi(f(\varphi_1(w))) \equiv 0 \quad (\text{mod. } g(w, a)),$$

also auch, indem man w durch $\theta_\varrho(w)$ ersetzt,

$$\begin{aligned} \Phi(f(\varphi_1\theta_\varrho(w))) &\equiv 0 \quad (\text{mod. } g(\theta_\varrho(w), a)), \\ \Phi(f(\varphi_1\theta_\varrho(w))) &\equiv 0 \quad (\text{mod. } g(w, a)). \end{aligned}$$

Da nun eben gezeigt ist, dass der Ausdruck $\varphi_1\theta_\varrho(w)$ jedem der Ausdrücke $\varphi_\nu(w)$ bei passender Wahl von ϱ congruent wird, so ergiebt sich, dass alle (mod. $g(w, a)$) verschiedenen Werthe der Reihe

$$(25.)\qquad f(\varphi_1(w)),\quad f(\varphi_2(w)),\quad \dots\quad f(\varphi_m(w))$$

Wurzeln der Congruenz

$$\Phi(x) \equiv 0 \pmod{g(w, a)}$$

sein müssen. Bildet man nun das Product

$$P(x) \equiv \prod_{\nu}^{1,m} (x - f(\varphi_\nu(w)) \pmod{g(w, a)},$$

so kann man nach Art. 3 annehmen, dass die Coefficienten von x in P Grössen des Bereichs $(\mathfrak{R})$ sind, und jeder irreductible Factor ergiebt, $\equiv 0 \pmod{g(w, a)}$ gesetzt, genau so viele Wurzeln wie sein Grad beträgt, weil andernfalls eine dieser Congruenzen mehr Wurzeln als ihr Grad beträgt, besitzen müsste, was bei einem irreductibeln Modul unmöglich ist. Wenn man also unter $\Phi(x)$ speciell einen beliebigen irreductibeln Factor von $P(x)$ versteht, so muss mindestens eine Gleichung von der Form

$$\Phi(f(\varphi_\mu(w))) \equiv 0 \pmod{g(w, a)}$$

bestehen; woraus sich nach den obigen Entwickelungen ergiebt, dass alle $(\text{mod.}\, g(w, a))$ verschiedenen Werthe der Reihe (25.) Wurzeln der Congruenz

$$\Phi(x) \equiv 0 \pmod{g(w, a)}$$

sind. Andrerseits kann diese Congruenz nur Grössen der Reihe (25.) als Wurzeln besitzen, weil sonst die Congruenz

$$P(x) \equiv \prod_{\nu}^{1,m} (x - f(\varphi_\nu(w))) \equiv 0 \pmod{g(w, a)}$$

noch durch andere Werthe von x als die Grössen (25.) erfüllt wäre; also ist der Grad jedes solchen irreductibeln Factors von $P(x)$ genau der Anzahl der mod. $g(w, a)$ verschiedenen unter den Grössen (25.) gleich, und alle diese Factoren $\Phi(x)$ haben, mod. $g(w, a)$ betrachtet, dieselben Linearfactoren. Also ist nothwendig $P(x)$ eine Potenz, z. B. die $k$te, einer irreductibeln Function $\Phi(x)$, deren Grad natürlich der $h$te ist, wenn $m = h.k$ gesetzt wird, und die Grössen (25.) zerfallen nothwendig in h Systeme von je k Grössen derart, dass zwei Grössen nach dem Modul $g(w, a)$ congruent sind oder nicht, je nachdem sie demselben oder verschiedenen Systemen angehören. Ist also $\Phi(x)$ ein irreductibles Polynom und

$$\Phi(f(x)) \equiv 0 \pmod{F(x)},$$

so ist der Grad von $\Phi(x)$ stets ein Theiler des Grades von $F(x)$; woraus man (beiläufig bemerkt) leicht auf Grund der Artt. 2 und 3 erschliesst, dass

die linke Seite einer *Galois*schen Resolvente $G(x, a)$ stets nur in Factoren gleichen Grades zerfallen kann.

Die hiermit gegebene arithmetische Ableitung der einfachsten Sätze betreffs der enthaltenen und enthaltenden Gattungen kann als neue Anwendung der Congruenzwurzeln $\varphi_\nu(w)$ zum Ersatz der Irrationalitäten ξ_ν betrachtet werden.

7. Um nun zu zwei gegebenen Gattungen eine dritte zu construiren, unter welcher beide enthalten sind, gehe man von den mit den Unbestimmten x_μ und y_ν gebildeten Polynomen

$$\mathfrak{F}(x) = \prod_{\mu}^{1,m}(x-x_\mu) = x^m - \mathfrak{f}_1 x^{m-1} + \cdots + (-1)^m \mathfrak{f}_m,$$

$$\mathfrak{G}(x) = \prod_{\nu}^{1,n}(x-y_\nu) = x^n - \mathfrak{g}_1 x^{n-1} + \mathfrak{g}_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \mathfrak{g}_n$$

aus und bilde in dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots \mathfrak{g}_n)$ die irreductible Gleichung, welcher die mit unbestimmten Coefficienten u, v gebildete Grösse $z_1 = ux_1 + vy_1$ genügt, also die Gleichung

$$(26.)\qquad \mathfrak{H}(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \prod_{\mu}^{1,m}\prod_{\nu}^{1,n}(x-(ux_\mu+vy_\nu)) = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist das Product aller von Null verschiedenen Differenzen

$$(ux_{\mu_1}+vy_{\nu_1})-(ux_{\mu_2}+vy_{\nu_2}) \;=\; u(x_{\mu_1}-x_{\mu_2})+v(y_{\nu_1}-y_{\nu_2}),$$

worin die Indices μ beliebige Werthe der Reihe $1, 2, \ldots m$, die Indices ν beliebige Werthe der Reihe $1, 2, \ldots n$ durchlaufen, und dieses Product ist offenbar eine homogene ganze Function von u und v, in welcher der Coefficient jedes beliebigen Gliedes eine ganze Function der Grössen $\mathfrak{f}_\mu$ und $\mathfrak{g}_\nu$ und gleichzeitig nur aus Factoren $x_{\mu_1}-x_{\mu_2}$ und $y_{\nu_1}-y_{\nu_2}$ zusammengesetzt ist, also nothwendig ein Product von Potenzen der Discriminante $D(\mathfrak{f})$ der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ und der Discriminante $E(\mathfrak{g})$ der Gleichung $\mathfrak{G}(x) = 0$ sein muss. Nennt man also die Discriminante der Gleichung (26.) etwa $\mathfrak{D}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$, so ist

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{f},\ \mathfrak{g}) \;=\; \sum_{\alpha,\beta} u^\alpha v^\beta (D(\mathfrak{f}))^{\epsilon_\alpha}(E(\mathfrak{g}))^{\epsilon_\beta} \qquad (\alpha+\beta = mn(mn-1)).$$

Ersetzt man x in der Gleichung (26.) durch z_1, so geht dieselbe in eine reine Identität zwischen den Unbestimmten u, v, x_μ, y_ν über, kann also differentiirt werden:

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = x_1 = -\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial u} : \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}\right)_{x=z_1},$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = y_1 = -\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial v} : \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}\right)_{x=z_1};$$

multiplicirt man hierin die Zähler und Nenner mit passenden Factoren und versteht unter γ, γ' ganze ganzzahlige Functionen von z_1, u, v, $\mathfrak{f}_\mu$, $\mathfrak{g}_\nu$, so ergiebt sich

$$x_1 = \gamma(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{D}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \xi(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}),$$
$$y_1 = \gamma'(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{D}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \eta(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}),$$

und es bestehen demnach die Identitäten

$$\mathfrak{F}(x_1) = \mathfrak{F}(\xi(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})) = 0,$$
$$\mathfrak{G}(y_1) = \mathfrak{G}(\eta(z_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})) = 0.$$

Da nun aber die Gleichung (26.) offenbar im Bereich der Grössen $\mathfrak{f}_\mu$ und $\mathfrak{g}_\nu$ irreductibel ist, so folgt aus den letzten beiden Gleichungen sofort, abgesehen von dem Nenner $\mathfrak{D}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$,

$$(27.) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\xi(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})), \\ \mathfrak{G}(\eta(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})). \end{cases}$$

Jetzt sei ausser $F(x)$ noch ein zweites Polynom

$$G(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n b_n$$

mit nicht verschwindender Discriminante $E(b)$ und Coefficienten aus dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R})$ gegeben; dann ist zunächst der Ausdruck

$$\mathfrak{D}(a, b) = \sum_{\alpha,\beta} u^\alpha v^\beta (D(a))^{e_\alpha} (E(b))^{e_\beta},$$

d. h. die Discriminante der Gleichung $\mathfrak{H}(x, a, b) = 0$, nicht identisch gleich Null, ist also bei passenden speciellen Werthen der Unbestimmten u, v von Null verschieden, sodass die Ausdrücke

$$\xi(x, a, b) = \frac{\gamma(x, a, b)}{\mathfrak{D}(a, b)},$$
$$\eta(x, a, b) = \frac{\gamma'(x, a, b)}{\mathfrak{D}(a, b)}$$

nicht illusorisch werden, und die Congruenzen (27.) auf Grund des in Art. 1 citirten *Gauss*schen Satzes ergeben:

$$\left.\begin{aligned} F(\xi(x, a, b)) \equiv 0, \\ G(\eta(x, a, b)) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } \mathfrak{H}(x, a, b)).$$

Hieraus folgt, wenn unter $H(x)$ ein beliebiger irreductibler Factor von $\mathfrak{H}(x, a, b)$ verstanden wird,

$$(28.)\quad \begin{cases} F(\xi(x,\ a,\ b)) \equiv 0, \\ G(\eta(x,\ a,\ b)) \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{mod. } H(x)).$$

Wenn nun $h(x)$ ein beliebiger irreductibler Factor der *Galois*schen Resolvente der Gleichung $H(x) = 0$ ist, so kann man nach Art. 2, unter χ ganze Functionen und unter q den Grad von $H(x)$ verstanden, setzen

$$H(x) \equiv \prod_{\nu}^{1,q} (x - \chi_\nu(w)) \quad (\text{mod. } h(w)),$$

und nach Art. 6 müssen infolge der Congruenzen (28.) die Grössen

$$\xi(\chi_1(w),\ a,\ b),\quad \xi(\chi_2(w),\ a,\ b),\quad \ldots\quad \xi(\chi_q(w),\ a,\ b)$$

in m gleichvielgliedrige Systeme zerfallen, sodass zwei dieser Grössen nach dem Modul $h(w)$ congruent sind oder nicht, je nachdem sie demselben oder verschiedenen Systemen angehören; ebenso müssen die Grössen

$$\eta(\chi_1(w),\ a,\ b),\quad \eta(\chi_2(w),\ a,\ b),\quad \ldots\quad \eta(\chi_q(w),\ a,\ b)$$

in n gleichvielgliedrige Systeme der eben beschriebenen Art zerfallen. — Damit ist in arithmetischer Form bewiesen,

> dass zwei beliebige einem natürlichen Rationalitätsbereich entstammende algebraische Grössen durch die aus ihnen mit unbestimmten Coefficienten gebildete lineare Verbindung rational ausgedrückt werden können.

8. Dieses Resultat lehrt unmittelbar, dass der Rationalitätsbereich, welcher durch Adjunction der beiden Irrationalitäten ξ und η entsteht, in dem durch Adjunction von $u\xi + v\eta$ definirten enthalten ist; um aber die umgekehrte Behauptung, dass beide Bereiche identisch sind, arithmetisch formuliren und beweisen zu können, muss zunächst die Zerlegung einer Function mit Coefficienten aus dem natürlichen Rationalitätsbereich ($\mathfrak{R}$) bei Adjunction einer einzigen diesem Bereich entstammenden algebraischen Grösse untersucht werden.

Die Polynome $F(x)$ und $G(x)$, deren Coefficienten dem natürlichen Rationalitätsbereich ($\mathfrak{R}$) angehören, seien irreductibel, und $\gamma(x)$ ein irreductibler Factor der *Galois*schen Resolvente der Gleichung

$$(29.)\quad F(x)G(x) = 0,$$

sodass die Congruenz

$$F(x)G(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma(w))$$

genau $m+n$ rationale Wurzeln besitzt; dann muss offenbar wegen der Irreductibilität des Moduls jede der Congruenzen

$$F(x) \equiv 0, \quad G(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

genau so viele Wurzeln haben, wie ihr Grad angiebt, also die erste m, die zweite n, sodass man setzen kann

$$\left.\begin{aligned} F(x) &\equiv \prod_{\mu}^{1,m}(x-f_\mu(w)), \\ G(x) &\equiv \prod_{\nu}^{1,n}(x-g_\nu(w)) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

wo nach Art. 1 unter f_μ und g_ν ganze Functionen von w zu verstehen sind, in deren Coefficienten als einziger Nenner die Discriminante der *Galois*schen Resolvente von (29.) vorkommt. Diese Discriminante ist nach Art. 1 von Null verschieden, sobald dasselbe von der Discriminante der Gleichung (29.) gilt; letztere Grösse aber ist, wie man leicht aus der Bildung der Discriminante der Gleichung

$$\mathfrak{F}(x)\mathfrak{G}(x) = \prod_{\mu}^{1,m}(x-x_\mu)\prod_{\nu}^{1,n}(x-y_\nu) = 0$$

ersieht, aus den Discriminanten von $F(x) = 0$ und $G(x) = 0$ und der Resultante *) beider Gleichungen multiplicativ zusammengesetzt. Die Resultante muss aber von Null verschieden sein, weil sonst die beiden Functionen $F(x)$ und $G(x)$ einen gemeinsamen Theiler hätten, der vermöge des *Euklid*ischen Algorithmus in rationaler Form gebildet werden könnte, was der vorausgesetzten Irreductibilität von $F(x)$ und $G(x)$ widerspricht. Die Discriminante der Gleichung (28.) ist also von Null verschieden, und damit werden auf dieselbe die sämmtlichen Entwickelungen der Artt. 1—5 anwendbar. Speciell hat die Congruenz

$$\gamma(x) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

wenn k der Grad von $\gamma(x)$ ist, k incongruente Wurzeln von der Form

$$\gamma_0(w) = w, \quad \gamma_1(w), \quad \gamma_2(w), \quad \dots \quad \gamma_{k-1}(w),$$

wo $\gamma_\nu(w)$ eine ganze Function von w bedeutet, und von Nennern, die dem Bereich ($\mathfrak{R}$) angehören, also die Unbestimmte w nicht enthalten, wie immer abgesehen wird.

Nun möge zunächst untersucht werden, wann die durch die Gleichung

---

*) Eine arithmetische Theorie der Resultante nach den Vorlesungen von Herrn *Kronecker* findet sich bei Herrn *Molk*, a. a. O. S. 23.

$G(\eta)=0$ definirte Grösse η in der durch die Gleichung $G(\xi)=0$ definirten Gattung ξ enthalten ist, d. h. wann eine Congruenz wie

$$G(f(x))\equiv 0 \pmod{F(x)},$$

worin $f(x)$ eine unbekannte ganze Function bedeutet, besteht. Aus dieser Congruenz folgt, wenn man wieder bei gehäuften Functionszeichen die Klammern fortlässt,

$$Gff_1(w)\equiv 0 \pmod{Ff_1(w)},$$

also auch

$$Gff_1(w)\equiv 0 \pmod{\gamma(w)}.$$

Da nun die Congruenz

$$G(x)\equiv 0 \pmod{\gamma(w)}$$

nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad angiebt, so muss eine Congruenz von folgender Gestalt bestehen:

$$(30.)\qquad ff_1(w)\equiv g_\nu(w) \pmod{\gamma(w)}.$$

Sind also etwa $\gamma_a, \gamma_b, \dots \gamma_l$ die sämmtlichen Substitutionen γ_ν, bei welchen $f_1(w)$ ungeändert bleibt, d. h. bestehen die Congruenzen

$$f_1(w)\equiv f_1\gamma_a(w)\equiv f_1\gamma_b(w)\equiv\cdots\equiv f_1\gamma_l(w) \pmod{\gamma(w)}$$

und keine weiteren zwischen $f_1(w)$ und einer Grösse $f_1\gamma_\nu(w)$, so folgt aus (30.) sofort:

$$(31.)\qquad g_\nu(w)\equiv g_\nu\gamma_a(w)\equiv g_\nu\gamma_b(w)\equiv\cdots\equiv g_\nu\gamma_l(w) \pmod{\gamma(w)};$$

denn es ist z. B.

$$g_\nu\gamma_a(w)\equiv ff_1\gamma_a(w) \pmod{\gamma\gamma_a(w)},$$

also auch

$$g_\nu\gamma_a(w)\equiv ff_1\gamma_a(w)\equiv ff_1(w) \pmod{\gamma(w)}.$$

Umgekehrt folgt aus den Congruenzen (31.) nach Art. 5 eine Congruenz von folgender Gestalt:

$$g_\nu(w)\equiv ff_1(w) \pmod{\gamma(w)},$$

also wäre

$$Gg_\nu(w)\equiv Gff_1(w)\equiv 0 \pmod{\gamma(w)}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass das Polynom $Gf(x)$ durch $F(x)$ theilbar sein muss; denn wäre das nicht der Fall, so wären bei der Irreductibilität von $F(x)$ beide Polynome relativ prim, und man könnte mit passenden ganzen Functionen $A(x)$ und $B(x)$ die Gleichung

$$A(x)F(x)+B(x)G(f(x)) = 1$$

bilden; also wäre auch

$$Af_1(x)Ff_1(x)+Bf_1(x)Gff_1(x) = 1,$$

was den Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} Ff_1(w)\equiv 0, \\ Gff_1(w)\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\gamma(w)}$$

widerspricht. Also besteht in der That die Congruenz

$$Gf(x)\equiv 0 \pmod{F(x)}.$$

Da nun sämmtliche Ausdrücke f_μ, g_ν, γ_ν auf rationalem Wege gebildet werden und durch eine endliche Anzahl von Versuchen die Substitutionen γ_a, γ_b, ..., welche $f_1(w)$ nicht ändern, gefunden werden können, so ist mit diesen Entwickelungen eine arithmetische Methode gegeben,

> zu entscheiden, ob eine gegebene, einem natürlichen Rationalitätsbereich entstammende algebraische Grösse unter einer gegebenen, diesem Bereich entstammenden Gattung enthalten ist, oder nicht.

9. Jetzt möge allgemeiner angenommen werden, dass das Polynom $G(x)$ bei Adjunction einer Wurzel der Gleichung $F(x)=0$ zerfällt, d. h. es sei

$$G(y)\equiv G_1(y,x)G_2(y,x) \pmod{F(x)},$$

wobei unter G_1 und G_2 ganze Functionen der beigefügten Argumente zu verstehen sind; dann ist offenbar

$$G(y)\equiv G_1(y,f_1(w))G_2(y,f_1(w)) \pmod{Ff_1(w)},$$

also auch

$$G(y)\equiv G_1(y,f_1(w))G_2(y,f_1(w)) \pmod{\gamma(w)};$$

da nun die Congruenz

$$G(y)\equiv 0 \pmod{\gamma(w)}$$

genau so viele Wurzeln hat, wie ihr Grad angiebt, so gilt dasselbe von den Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} G_1(y,f_1(w))\equiv 0, \\ G_2(y,f_1(w))\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\gamma(w)};$$

denn andernfalls würde eine dieser Congruenzen mehr Wurzeln haben, als ihr Grad beträgt, was bei der Irreductibilität des Moduls unmöglich ist. Man kann also, wenn mit n_1 der Grad von $G_1(y,f_1(w))$ und mit n_2 der Grad von $G_2(y,f_1(w))$ in Bezug auf y bezeichnet wird, etwa setzen:

$$(32.)\quad \begin{cases} G_1(y, f_1(w)) \equiv \prod\limits_{\nu}^{1,n_1} (y - g_{\alpha_\nu}(w)) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)), \\ G_2(y, f_1(w)) \equiv \prod\limits_{\nu}^{1,n_2} (y - g_{\beta_\nu}(w)) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)), \end{cases}$$

wobei die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n_2}$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... n bilden. Dann folgt aus (32.), dass jede symmetrische Function der n_1 Grössen $g_\alpha(w)$, nach dem Modul $\gamma(w)$ betrachtet, durch $f_1(w)$ rational ausgedrückt werden kann. Eine solche symmetrische Function, durch welche, nach dem Modul $\gamma(w)$ betrachtet, alle andern rational ausdrückbar sind, kann leicht gebildet werden; setzt man z. B.

$$S(w) = \prod_{\nu}^{1,n_1} (u - g_{\alpha_\nu}(w)),$$

so sind die conjugirten Werthe nach Art. 5 die nach dem Modul $\gamma(w)$ incongruenten Werthe der Reihe

$$S(w), \quad S\gamma_1(w), \quad S\gamma_2(w), \quad \ldots \quad S\gamma_{k-1}(w).$$

Diese Werthe haben alle die Gestalt

$$\prod_{\nu}^{1,n_1} (u - g_{\lambda_\nu}(w));$$

denn sonst müsste eine Congruenz

$$(33.)\quad g_\alpha \gamma_\nu(w) \equiv f_\lambda(w) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

bestehen; nun kann aber mit passenden ganzen Functionen $M(x)$ und $N(x)$ eine Gleichung

$$M(x)F(x) + N(x)G(x) = 1$$

gebildet werden; also wäre

$$Mf_\lambda(x)Ff_\lambda(x) + Nf_\lambda(x)Gf_\lambda(x) = 1,$$

also wegen der Congruenz (33.):

$$Mf_\lambda(w)Ff_\lambda(w) + Nf_\lambda(w)Gg_\alpha\gamma_\nu(w) \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)).$$

Das ist aber unmöglich, weil die Congruenz

$$Gg_\alpha(w) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

also auch

$$Gg_\alpha\gamma_\nu(w) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma\gamma_\nu(w)),$$

also auch

$$Gg_\alpha\gamma_\nu(w) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

und weil ferner die Congruenz

$$Ff_\lambda(w) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

besteht. Ist nun $S(w)$ einem Werthe $S\gamma_\nu(w)$ nach dem Modul $\gamma(w)$ congruent, so ist z. B

$$\prod_\nu^{1,n_1} (u - g_{a_\nu}(w)) \equiv \prod_\nu^{1,n_1} (u - g_{\lambda_\nu}(w)) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

also

$$\prod_\nu^{1,n_1} (g_{\lambda_\mu}(w) - g_{a_\nu}(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

wenn μ eine beliebige der Zahlen 1, 2, ... n_1 bedeutet; also müssen die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n_1}$ nichts anderes als eine Permutation der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n_1}$ sein. Also bleibt der Ausdruck $S(w)$ nur bei solchen Substitutionen ungeändert, welche die n_1 Grössen $g_a(w)$ unter einander vertauschen. Bei diesen Substitutionen bleiben aber offenbar alle symmetrischen Functionen der Grössen $g_a(w)$, nach dem Modul $\gamma(w)$ betrachtet, ungeändert; also sind dieselben nach Art. 5 durch $S(w)$ rational ausdrückbar. Die hinreichende und nothwendige Bedingung für die (mod. $\gamma(w)$) zu verstehende rationale Ausdrückbarkeit aller symmetrischen Functionen der Grössen $g_a(w)$ durch $f_1(w)$ ist also die ebenso zu verstehende rationale Ausdrückbarkeit von $S(w)$. Hat man also, indem unter φ eine ganze Function verstanden wird, eine Congruenz

$$S(w) \equiv \varphi f_1(w) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

so definirt die Congruenz (32.) einen durch $f_1(w)$ rational ausdrückbaren Theiler $n_1$ten Grades von $G(y)$, betrachtet nach dem Modul $\gamma(w)$, und es besteht eine Congruenz

$$G(y) \equiv G_1(y, f_1(w))\, G_2(y, f_1(w)) \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)).$$

Wäre nun die Differenz

$$G(y) - G_1(y, x)\, G_2(y, x)$$

nicht durch $F(x)$ theilbar, so gäbe es ganze Functionen $T(x)$ und $U(x)$, für welche die Gleichung

$$T(x)F(x) + U(x)\big(G(y) - G_1(y, x)\, G_2(y, x)\big) = 1$$

erfüllt ist; diese Gleichung ist aber wegen der Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} Ff_1(w) \equiv 0, \\ G(y) - G_1(y, f_1(w))\, G_2(y, f_1(w)) \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

unmöglich. Bildet man also alle möglichen Ausdrücke $S(w)$, so ergiebt

jeder dieser Ausdrücke, welcher bei allen die Grösse $f_1(w)$ (mod. $\gamma(w)$) nicht ändernden Substitutionen mod. $\gamma(w)$ ungeändert bleibt, eine Congruenz

$$G(y) \equiv G_1(y, x) G_2(y, x) \pmod{F(x)},$$

und jede solche Congruenz, in welcher $G_1(y, x)$ in y vom Grade n_1 ist, liefert eine mod. $\gamma(w)$ durch $f_1(w)$ rational ausdrückbare Grösse $S(w)$. Damit ist eine arithmetisch begründete Methode gegeben,

> alle bei Adjunction einer dem natürlichen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R})$ entstammenden Grösse rationalen Factoren zu finden, durch welche eine gegebene ganze Function von einer Variabeln, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören und deren Discriminante nicht verschwindet, theilbar ist;

denn man übersieht leicht, dass alle in diesem Artikel gemachten Schlüsse nur an die Bedingung gebunden sind, dass die Discriminante von $G(x)$ nicht verschwindet und $G(x)$ durch die irreductible Function $F(x)$ nicht theilbar ist.

10. Man kann also alle Functionen bilden, und erhält dabei nur eine endliche Anzahl, welche mod. $F(x)$ in $G(y)$ als Theiler enthalten sind; ist eine dieser Functionen mod. $F(x)$ in Factoren zerlegbar, so kommen offenbar auch diese Factoren unter dem aufgestellten System der Theiler von $G(y)$ vor; jeder dieser Theiler, der durch keinen anderen theilbar ist, was bei der Endlichkeit des Systems durch eine endliche Anzahl von Versuchen festgestellt werden kann, ist demnach überhaupt durch keine Function von y mod. $F(x)$ theilbar, kann also als mod. $F(x)$ irreductibel bezeichnet werden. Dieser neue Begriff der Irreductibilität mod. $F(x)$ ist hiermit zunächst für alle diejenigen ganzen Functionen von x und y begründet, welche mod. $F(x)$ als Theiler in einer ganzen Function $G(y)$ von y allein, deren Discriminante nicht verschwindet, enthalten sind; für alle diese Functionen kann bei einer gegebenen Function $G(y)$ arithmetisch entschieden werden, ob sie irreductibel sind oder nicht; dagegen kann diese Entscheidung noch nicht für jede beliebige ganze Function von x und y getroffen werden, von der man nicht weiss, dass sie in einer Function $G(y)$ mit nicht verschwindender Discriminante mod. $F(x)$ aufgeht, sodass für diesen allgemeineren Fall der Begriff der Irreductibilität noch nicht arithmetisch begründet ist. Es kann aber gezeigt werden, dass aus den schon definirten irreductibeln Functionen mod. $F(x)$ jede Function von x und y multiplicativ zusammengesetzt ist.

Auf irgend zwei ganze Functionen von x und y kann stets zur Auffindung ihres grössten gemeinsamen Theilers mod. $F(x)$ der *Euklid*ische Algorithmus, ohne den Begriff der Irreductibilität vorauszusetzen, angewandt werden *). Sind die gegebenen Functionen $G_1(x, y)$ und $G_2(x, y)$, so kann stets auf rationalem Wege eine Congruenz

$$H_1(x, y)G_1(x, y)+H_2(x, y)G_2(x, y) \equiv T(x, y) \quad (\text{mod.}\, F(x))$$

abgeleitet werden, worin H_1, H_2 ganze Functionen sind und unter T der grösste gemeinsame Theiler der beiden gegebenen Functionen mod. $F(x)$ zu verstehen ist; weiss man also, dass eine der Functionen G_1, G_2 durch keine andere ganze Function von x und y mod. $F(x)$ theilbar sein kann, so muss eine Congruenz

$$H_1(x, y)G_1(x, y)+H_2(x, y)G_2(x, y) \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, F(x))$$

bestehen.

Nun sei $G(y, x)$ eine ganz beliebige ganze Function; dann kann dieselbe stets mit einem derartigen in x und y ganzen und rationalen Factor $\bar{G}(y, x)$ multiplicirt werden, dass das Product mod. $F(x)$ einer von x unabhängigen Grösse congruent wird. Man bilde z. B.

$$\begin{aligned}\prod_{\nu}^{1,m} G(y, x_\nu) &= H(y, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m)\\ &= G(y, x_1).\prod_{\nu}^{2,m} G(y, x_\nu);\end{aligned}$$

dann kann das in $x_2, x_3, \ldots x_m$ symmetrische Product auf der rechten Seite durch $x_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m$ rational und ganz ausgedrückt werden, sodass man setzen kann

$$H(y, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m) = G(y, x_1).\bar{H}(y, x_1, \mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_m),$$

also, da die Gleichung $\mathfrak{F}(x)=0$ mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ im Bereich der symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_m$ irreductibel ist:

$$H(y, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_m) \equiv G(y, x)\bar{H}(y, x, \mathfrak{f}_1, \ldots \mathfrak{f}_m) \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{F}(x));$$

setzt man nun wie früher

$$F(x) = x^m - a_1 x^{m-1} + \cdots + (-1)^m a_m,$$

so ergiebt der in Art. 1 citirte *Gauss*sche Satz das Resultat

$$H(y, a_1, a_2, \ldots a_m) \equiv G(y, x)\bar{H}(y, x, a_1, \ldots a_m) \quad (\text{mod.}\, F(x))$$

---

*) Vgl. *Molk* a. a. O. S. 59.

oder kürzer

$$G(y,\ x)\bar{G}(y,\ x) \equiv H(y) \quad (\text{mod. } F(x)).$$

Auf Grund der als bekannt vorausgesetzten Theorie der Zerlegung ganzer Functionen in natürlichen Rationalitätsbereichen kann man dann setzen

$$H(y) = (K(y))^{\varkappa}(L(y))^{\lambda}\ldots,$$

wo K, L, ... ganze Functionen mit nicht verschwindender Discriminante bedeuten. Diese Functionen kann man nach den obigen Entwickelungen als Producte mod. $F(x)$ irreductibler ganzer Functionen von y und x darstellen; es sei etwa

$$\left.\begin{array}{l} K(y) \equiv k_1(y,\ x)k_2(y,\ x)\ldots k_\alpha(y,\ x), \\ L(y) \equiv l_1(y,\ x)\,l_2(y,\ x)\ldots\,l_\beta(y,\ x) \end{array}\right\} \quad (\text{mod. } F(x))$$

u. s. f.; nach dem für Factoren von Functionen wie K, L, ... begründeten Begriff von Irreductibilität muss $G(y, x)$ durch eine beliebige der Functionen k, l, ... entweder mod. $F(x)$ theilbar oder gegen dieselbe relativ prim sein. Wäre nun $G(y, x)$ durch keine der Functionen k, l, ... theilbar, so könnte man, indem man unter k', l', ..., k'', l'', ... ganze Functionen versteht, Congruenzen von folgender Gestalt bilden:

$$\left.\begin{array}{l} k_1(y,\ x)k_1'(y,\ x)+G(y,\ x)k_1''(y,\ x) \equiv 1, \\ k_2(y,\ x)k_2'(y,\ x)+G(y,\ x)k_2''(y,\ x) \equiv 1, \\ \vdots \\ k_\alpha(y,\ x)k_\alpha'(y,\ x)+G(y,\ x)k_\alpha''(y,\ x) \equiv 1, \\ l_1(y,\ x)\,l_1'(y,\ x)+G(y,\ x)\,l_1''(y,\ x) \equiv 1, \\ \vdots \\ l_\beta(y,\ x)\,l_\beta'(y,\ x)+G(y,\ x)\,l_\beta''(y,\ x) \equiv 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (\text{mod. } F(x)),$$

woraus sich durch Multiplication sofort ergiebt:

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{\nu}^{1,\alpha} k_\nu(y,\ x)k_\nu'(y,\ x) \equiv 1, \\ \prod\limits_{\varrho}^{1,\beta} l_\varrho(y,\ x)\,l_\varrho'(y,\ x) \equiv 1 \end{array}\right\} \quad (\text{modd. } G(y,\ x),\ F(x))$$

u. s. f.; potenzirt man nun die erste dieser Congruenzen mit $\varkappa$, die zweite mit λ u. s. f., so ergiebt sich, indem unter $H'(x, y)$ eine ganze Function verstanden wird,

$$H(y).H'(x,\ y) \equiv 1 \quad (\text{modd. } G(y,\ x),\ F(x)),$$

was der Congruenz

$$H(y) \equiv G(y, x)\bar{G}(y, x) \pmod{F(x)}$$

oder

$$H(y) \equiv 0 \quad (\text{modd. } G(y, x),\ F(x))$$

widerspricht. Die Function $G(y, x)$ muss also durch mindestens einen der irreductibeln Factoren $k, l, \ldots$ von $H(y)$ nach dem Modul $F(x)$ theilbar sein. Für den Quotienten der Division von $G(y, x)$ durch diesen irreductibeln Factor gilt dieselbe Schlussweise wie für $G(y, x)$ selbst; also ergiebt sich das Resultat,

> dass jede ganze Function $G(y, x)$ nach dem irreductibeln Modul $F(x)$ einem Product ganzer Functionen von y und x congruent ist, welche nach dem Modul $F(x)$ irreductibel sind.

Der zuerst abgeleitete Bereich von irreductibeln Functionen, d. h. diejenigen, welche Theiler einer Function $G(y)$ mit nicht verschwindender Discriminante sind, reicht also aus, um alle ganzen Functionen von x und y, abgesehen von Vielfachen des Moduls $F(x)$ multiplicativ zusammenzusetzen; in jenem engeren Bereich aber konnte jede Function auf ihre Reductibilität hin durch eine endliche Anzahl von Operationen untersucht werden, weil jedesmal eine endliche Anzahl von Functionen von x und y gebildet werden konnte, welche allein als Theiler von $G(y)$ mod. $F(x)$ in Betracht kommen.

Mit dem Begriff der Irreductibilität ist nun sofort die Möglichkeit gegeben, die sämmtlichen in den Artt. 1—7 für einen natürlichen Rationalitätsbereich angestellten Ueberlegungen auf einen Gattungsbereich zu übertragen, der durch Adjunction einer einzigen dem natürlichen Bereich ($\mathfrak{R}$) entstammenden Irrationalität definirt ist; oder arithmetisch gesprochen, die citirten Entwickelungen bleiben richtig, wenn statt der Grössen des Bereichs ($\mathfrak{R}$) ganze Functionen einer Unbestimmten x eingeführt werden, welche mod. $F(x)$ zu betrachten sind, sodass man jede Gleichung durch eine Congruenz mod. $F(x)$, und jede Congruenz mit einfachem Modul M durch eine Congruenz modd. $M, F(x)$ ersetzt.

11. Auf den hiermit begründeten speciellen Begriff vom Gattungsbereich kann der allgemeinere Fall, dass mehrere Irrationalitäten adjungirt werden, mit Hülfe der Entwickelungen der Artt. 7 und 8 zurückgeführt werden.

Versteht man unter ξ und η Wurzeln der in dem Bereich $(\mathfrak{R})$ irreductibeln Gleichungen $F(\xi) = 0$ und $G(\eta) = 0$, so möge zunächst untersucht werden, welche Grössen des Bereichs $((\mathfrak{R}), \xi, \eta)$ den Werth Null haben; es sei z. B.

$$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$

wo φ eine ganze Function bedeutet, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören. Dann hat die Gleichung

$$(34.) \qquad \varphi(\xi, y) = 0$$

mit der Gleichung $G(y) = 0$ die Wurzel η gemein; letztere Gleichung kann aber bei Adjunction von ξ reductibel werden; dann sei $G'(y, \xi)$ derjenige irreductible Factor von $G(y)$, für welchen die Gleichung

$$(35.) \qquad G'(y, \xi) = 0$$

die Wurzel η besitzt. Die Gleichung (34.) hat nun mit der im Bereich $(\xi, (\mathfrak{R}))$ irreductibeln Gleichung (35.) eine Wurzel gemein; also folgt, wenn man unter g', g'' ganze Functionen mit Coefficienten aus dem Bereich $(\mathfrak{R})$ versteht,

$$\varphi(\xi, y) = g'(\xi, y) G'(y, \xi),$$

und weil diese Gleichung ausser ξ nur Grössen eines Bereichs enthält, in welchem das Polynom $F(x)$ irreductibel bleibt, so folgt

$$\varphi(x, y) = g'(x, y) G'(y, x) + g''(x, y) F(x).$$

Jede die Grössen ξ und η enthaltende Gleichung geht also, wenn man ξ durch x und η durch y ersetzt, in eine richtige Congruenz modd. $G'(y, x)$, $F(x)$ über — also im Allgemeinen nicht in eine Congruenz modd. $G(y)$, $F(x)$. Ist andrerseits $F'(\xi, \eta) = 0$ und $F'(x, \eta)$ ein bei Adjunction von η irreductibler Factor von $F(x)$, so ergiebt sich offenbar ebenso, wenn man unter f', f'' ganze Functionen mit Coefficienten aus dem Bereich $(\mathfrak{R})$ versteht,

$$\varphi(x, y) = f'(x, y) G(y) + f''(x, y) F'(x, y).$$

Statt also die Werthe der Grössen des Bereichs $((\mathfrak{R}), \xi, \eta)$ zu vergleichen, kann man die entsprechend gebildeten Grössen des Bereichs $((\mathfrak{R}), x, y)$ entweder modd. $G'(y, x)$, $F(x)$ oder modd. $G(y)$, $F'(x, y)$ betrachten; nach dem einen wie nach dem anderen Modulsystem erhält man eine richtige Congruenz, wenn man in einer richtigen Gleichung ξ durch x und η durch y ersetzt. Damit ist eine doppelte arithmetische Definition des durch Adjunction zweier Irrationalitäten bestimmten Gattungsbereichs gegeben; die Identität beider

Definitionen, oder, was dasselbe bedeutet, die Aequivalenz*) der beiden angegebenen Modulsysteme, welche bei Benutzung der Irrationalitäten ξ und η offenbar ist, soll nun auf arithmetischem Wege bestätigt werden.

Wie in Art. 8 sei wieder $\gamma(w)$ ein irreductibler Factor der *Galois*schen Resolvente der Gleichung $F(x)G(x)=0$, und es sei, indem die Grade der irreductibeln Functionen F, γ und G durch m, k und n bezeichnet werden, wiederum

$$\left.\begin{array}{l} Ff_\mu(w)\equiv 0 \\ Gg_\nu(w)\equiv 0 \\ \gamma\gamma_\varrho(w)\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\gamma(w)} \qquad \begin{array}{l}(\mu=1,2,\dots m),\\ (\nu=1,2,\dots n),\\ (\varrho=0,1,\dots,k-1);\end{array}$$

ferner sei, indem man unter $G'(y,x)$ eine mod. $F(x)$ irreductible Function versteht,

$$G(y)\equiv G'(y,x)G''(y,x) \pmod{F(x)},$$

also auch

$$G(y)\equiv G'(y,f_1(w))G''(y,f_1(w)) \pmod{\gamma(w)},$$

und, wenn n' der Grad von $G'(y,x)$ in Bezug auf y ist, sei

$$G'(g_\nu(w),\ f_1(w))\equiv 0 \pmod{\gamma(w)} \qquad (\nu=1,2,\dots n').$$

Jetzt werde angenommen, die ganze Function $\varphi(x,y)$, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören, genüge der Congruenz

$$\varphi(x,\ y)\equiv 0 \quad (\text{modd. } G'(y,x),\ F(x));$$

dann folgt sofort

$$\varphi(f_1(w),\ g_1(w))\equiv 0 \pmod{\gamma(w)}.$$

Versteht man nun unter $\gamma_0, \gamma_c, \gamma_d, \dots \gamma_p$ die sämmtlichen Substitutionen γ_ν, welche mod. $\gamma(w)$ die Grösse $g_1(w)$ nicht ändern, sodass die folgenden Congruenzen bestehen:

$$g_1(w)\equiv g_1\gamma_c(w)\equiv g_1\gamma_d(w)\equiv\cdots\equiv g_1\gamma_p(w) \pmod{\gamma(w)},$$

so sind die mod. $\gamma(w)$ verschiedenen Werthe der Reihe

$$(36.)\qquad f_1(w),\quad f_1\gamma_c(w),\quad f_1\gamma_d(w),\quad \dots\quad f_1\gamma_p(w)$$

nach Art. 5 die Wurzeln einer Congruenz mod. $\gamma(w)$, deren Coefficienten ganze Functionen von $g_1(w)$ sind; denn eine symmetrische Function jener verschiedenen Werthe bleibt bei den Substitutionen $\gamma_0, \gamma_c, \gamma_d, \dots \gamma_p$ ungeändert, und $g_1(w)$ bleibt bei diesen und nur diesen Substitutionen ungeändert. Die Congruenz, deren Wurzeln die verschiedenen Werthe der Reihe (36.) sind, sei folgende:

*) Vgl. *Kronecker,* Grundzüge § 21, II. a. a. O. S. 77.

$$F'(x,\ g_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \gamma(w)),$$

sodass man setzen kann

$$(37.)\quad F'(x,\ g_1(w))F''(x,\ g_1(w)) \equiv F(x) \quad (\text{mod.}\ \gamma(w)).$$

Hieraus ergiebt sich leicht die Congruenz

$$(38.)\quad F'(x,\ y).F''(x,\ y) \equiv F(x) \quad (\text{mod.}\ G(y));$$

denn da $G(y)$ irreductibel ist, müsste andernfalls eine Gleichung von folgender Gestalt bestehen

$$M'(x,\ y)G(y)+M''(x,\ y)(F'(x,\ y)F''(x,\ y)-F(x)) = M'''(x),$$

worin M', M'', M''' ganze Functionen bedeuten; daraus aber würde folgen:

$$M'(x, g_1(w))Gg_1(w)+M''(x, g_1(w))(F'(x, g_1(w))F''(x, g_1(w))-F(x)) = M'''(x),$$

was wegen der Congruenz (37.) offenbar unmöglich ist. Also besteht in der That die Congruenz (38.); und hierin muss $F'(x, y)$ nach dem Modul $G(y)$ irreductibel sein; denn sonst bestünde eine Congruenz

$$F'(x,\ g_1(w)) \equiv F_1'(x,\ g_1(w))F_2'(x,\ g_1(w)) \quad (\text{mod.}\ \gamma(w)),$$

und es wären schon die symmetrischen Functionen von einem Theil der mod. $\gamma(w)$ incongruenten Werthe (36.) ganzen Functionen von $g_1(w)$ congruent, was offenbar der Eigenschaft der Substitutionen γ_0, γ_c, ... γ_p, die Grösse $g_1(w)$ ungeändert zu lassen, widerspricht. — Nun ergiebt die Congruenz

$$\varphi(f_1(w),\ g_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \gamma(w))$$

die weiteren

$$\varphi(f_1\gamma_c(w),\ g_1\gamma_c(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \gamma\gamma_c(w)),$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f_1\gamma_c(w),\quad g_1(w)) \equiv 0, \\ \varphi(f_1\gamma_d(w),\quad g_1(w)) \equiv 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(f_1\gamma_p(w),\quad g_1(w)) \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod.}\ \gamma(w));$$

also sind die sämmtlichen mod. $\gamma(w)$ verschiedenen Werthe (36.) unter den Wurzeln der Congruenz

$$\varphi(x,\ g_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\ \gamma(w))$$

enthalten, sodass man setzen kann

$$(39.)\quad \varphi(x,\ g_1(w)) \equiv F'(x,\ g_1(w))f''(x,\ g_1(w)) \quad (\text{mod.}\ \gamma(w)),$$

wo f'' eine ganze Function bedeutet, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören. Mit eben solchen ganzen Functionen N', N'', N''' könnte man

die Gleichung

$$(40.)\qquad N'(x,\ y)G(y)+N''(x,\ y)\{\varphi(x,\ y)-F'(x,\ y)f''(x,\ y)\} = N'''(x)$$

bilden, wenn nicht die Grösse

$$\varphi(x,\ y)-F'(x,\ y)f''(x,\ y)$$

durch die irreductible Function $G(y)$ theilbar ist; da nun die Gleichung (40.), wenn man $y = g_1(w)$ setzt, mit Rücksicht auf (39.) einen Widerspruch ergeben würde, so kann man, unter f' eine ganze Function von derselben Beschaffenheit wie f'' verstanden, setzen

$$\varphi(x,\ y)-F'(x,\ y)f''(x,\ y) = G(y)f'(x,\ y),$$

$$\varphi(x,\ y) = G(y)f'(x,\ y)+F'(x,\ y)f''(x,\ y),$$

$$\varphi(x,\ y) \equiv 0 \quad (\text{modd. } G(y),\ F'(x,\ y)).$$

Da nun die vorausgesetzte Congruenz

$$\varphi(x,\ y) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F(x),\ G'(y,\ x))$$

den Ausgangspunkt bildete, so ergiebt sich das folgende Resultat:

> Sind die Polynome $F(x)$ und $G(y)$ irreductibel, und hat $G(y)$, nach dem Modul $F(x)$ betrachtet, den irreductibeln Factor $G'(y,\ x)$, so hat $F(x)$, nach dem Modul $G(y)$ betrachtet, einen derartigen irreductibeln Factor $F'(x,\ y)$, dass die Aequivalenz der Modulsysteme
>
> $$(F(x),\ G'(y,\ x)) \sim (G(y),\ F'(x,\ y))$$
>
> besteht, wobei von Nennern, welche x und y nicht enthalten, abgesehen wird.

12. Jede Congruenz nach einem der beiden Modulsysteme $(F(x), G'(y, x))$ und $(G(y), F'(x, y))$ kann nun, indem man x und y durch ganze Functionen einer neuen Unbestimmten z ersetzt, in eine Congruenz nach einem bestimmten einfachen Modul verwandelt werden; und dieser Modul kann so gewählt werden, dass jede auf ihn bezügliche Congruenz, wenn man z durch eine ganze Function von x und y ersetzt, in eine richtige Congruenz nach einem jener beiden Modulsysteme übergeht. Ein solcher Modul ist die in Art. 7 eingeführte irreductible Function $H(z)$, und diese war, algebraisch gesprochen, ein irreductibler Factor der linken Seite der Gleichung, welcher die Grösse $u\xi+v\eta$ genügt.

Die ganze Function

$$\mathfrak{H}(z,\ \mathfrak{f},\ \mathfrak{g}) = \prod_{\mu}^{1,m}\prod_{\nu}^{1,n}(z-(ux_\mu+vy_\nu))$$

ist offenbar nach dem Modul $\Gamma(w, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ in lineare Factoren zerlegbar, wenn $\Gamma(x, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = 0$ die *Galois*sche Resolvente der Gleichung

$$\mathfrak{F}(x).\mathfrak{G}(x) = 0$$

bedeutet; also zerfällt auch $\mathfrak{H}(z, a, b)$ nach dem Modul $\Gamma(w, a, b)$ in Linearfactoren, also *a fortiori* nach dem in $\Gamma(w, a, b)$ als Factor enthaltenen Modul $\gamma(w)$. Die Congruenz

$$\mathfrak{H}(z, a, b) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

hat also so viele Wurzeln, wie ihr Grad angiebt; dasselbe muss, wenn $H(z)$ irgend ein irreductibler Factor der linken Seite ist, von der Congruenz

$$(41.) \qquad H(z) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

gelten, weil sonst eine Congruenz mehr Wurzeln hätte, als ihr Grad beträgt, was bei der Irreductibilität des Moduls unmöglich ist, und die Zusammensetzung des Products $\mathfrak{H}$ ergiebt leicht, dass alle Wurzeln der Congruenz (41.) auf die Form

$$uf_\mu(w) + vg_\nu(w)$$

gebracht werden können.

Dann kann $H(z)$ unter den irreductibeln Factoren von $\mathfrak{H}(z, a, b)$ so gewählt werden, dass auch die Congruenz

$$H(uf_1(w) + vg_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

besteht, oder, wenn

$$uf_1(w) + vg_1(w) = h_1(w)$$

gesetzt wird,

$$(42.) \qquad H(h_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)).$$

Diese Congruenz kann man nach den in dem Modul $\gamma(w)$ nicht vorkommenden Unbestimmten u und v differentiiren; setzt man

$$\frac{\partial H}{\partial z} = H_1(z), \quad \frac{\partial H}{\partial u} = H_2(z), \quad \frac{\partial H}{\partial v} = H_3(z),$$

so ergiebt sich aus (42.) sofort

$$\left.\begin{aligned} H_1(h_1(w))\frac{\partial h_1}{\partial u} + H_2(h_1(w)) \equiv 0, \\ H_1(h_1(w))\frac{\partial h_1}{\partial v} + H_3(h_1(w)) \equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod.}\, \gamma(w));$$

hierin kann man auf beiden Seiten mit einer derartigen ganzen Function von $h_1(w)$ multipliciren, dass der Coefficient des Differentialquotienten in

beiden Congruenzen die Discriminante der irreductibeln Gleichung $H(z) = 0$ wird, also eine von Null verschiedene Grösse des Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{R})$, wenn man die Unbestimmten u und v durch passend gewählte Grössen dieses Bereichs ersetzt. Versteht man also unter F_1 und G_1 ganze Functionen mit Coefficienten aus dem Bereich $(\mathfrak{R})$, so kann man setzen

$$(43.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial h_1(w)}{\partial u} &= f_1(w) \equiv F_1(h_1(w)), \\ \frac{\partial h_1(w)}{\partial v} &= g_1(w) \equiv G_1(h_1(w)) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)).$$

Jetzt sei eine Congruenz

$$(44.)\quad \varphi(x,\, y) \equiv 0 \quad (\text{modd.}\, F(x),\ G'(y,\, x))$$

gegeben; dann ergeben die voraussetzungsmässig bestehenden Congruenzen

$$F(f_1(w)) \equiv G'(g_1(w),\ f_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

die Folge

$$\varphi(f_1(w),\ g_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)),$$

also nach (43.)

$$\varphi\,\{F_1(h_1(w)),\ G_1(h_1(w))\} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w))$$

oder kurz, indem man unter Φ eine ganze Function versteht, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören,

$$\Phi(h_1(w)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \gamma(w)).$$

Da nun die ganze Function $H(x)$ irreductibel ist, so ist sie entweder ein Theiler von $\Phi(x)$, oder es besteht eine Gleichung

$$\Phi_0(x)\Phi(x) + H_0(x)H(x) = 1,$$

worin Φ_0 und H_0 ganze Functionen bedeuten; in letzterem Falle wäre aber

$$\Phi_0(h_1(w))\Phi(h_1(w)) + H_0(h_1(w))H(h_1(w)) = 1,$$

was unmöglich ist, weil die linke Seite durch $\gamma(w)$ theilbar ist; also besteht die Congruenz

$$\Phi(z) = \varphi(F_1(z),\ G_1(z)) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, H(z)),$$

womit die Congruenz (44.) in der beabsichtigten Weise durch eine Congruenz mit dem einfachen Modul $H(z)$ ersetzt ist.

Umgekehrt kann jede Congruenz

$$\Phi(z) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, H(z))$$

leicht in eine Congruenz von der Gestalt (44.) umgewandelt werden. Zunächst ergiebt sich:

$$(45.)\quad \begin{cases} \Phi(uf_1(w)+vg_1(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } H(uf_1(w)+vg_1(w))),\\ \Phi(uf_1(w)+vg_1(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma(w)). \end{cases}$$

Die Congruenz

$$(46.)\qquad \Phi(ux+vg_1(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma(w))$$

hat die Wurzel $x=f_1(w)$ und ändert ihre Gestalt bei keiner der Substitutionen $\gamma_c(w)$, $\gamma_d(w)$, ..., welche $g_1(w)$ ungeändert lassen; also hat sie auch die Wurzeln $f_1\gamma_c(w)$, $f_1\gamma_d(w)$, ... Mit anderen Worten, ersetzt man in (45.) die Unbestimmte w durch $\gamma_c(w)$, so folgt

$$\Phi(uf_1\gamma_c(w)+vg_1\gamma_c(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma\gamma_c(w));$$

weil nun die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} g_1\gamma_c(w)\equiv g_1(w),\\ \gamma_1\gamma_c(w)\equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\text{mod. } \gamma(w))$$

bestehen, so folgt weiter

$$\Phi(uf_1\gamma_c(w)+vg_1(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma(w)),$$

d. h. die Congruenz (46.) hat die Wurzel $x=f_1\gamma_c(w)$; ebenso sind offenbar alle mod. $\gamma(w)$ verschiedenen Werthe der Reihe

$$f_1(w),\quad f_1\gamma_c(w),\quad f_1\gamma_d(w),\quad \dots\quad f_1\gamma_p(w),$$

d. h. alle Wurzeln der Congruenz $F'(x,\,g_1(w))\equiv 0$ (mod. $\gamma(w)$) auch Wurzeln der Congruenz (46.). Hieraus folgt ebenso, wie in Art. 11 aus der Congruenz

$$\varphi(x,\,g_1(w))\equiv 0 \quad (\text{mod. } \gamma(w))$$

die weitere Congruenz

$$\varphi(x,\,y)\equiv 0 \quad (\text{modd. } G(y),\ F'(x,\,y))$$

abgeleitet wurde, das Resultat

$$\Phi(ux+vy)\equiv 0 \quad (\text{modd. } G(y),\ F'(x,\,y))$$

oder, was nach Art. 11 dasselbe bedeutet,

$$\Phi(ux+vy)\equiv 0 \quad (\text{modd. } F(x),\ G'(y,\,x)).$$

Da nun nach Art. 11 jede ξ und η enthaltende Gleichung, wenn man ξ durch x und η durch y ersetzt, in eine richtige Congruenz nach einem der beiden äquivalenten Modulsysteme

$$(G(y),\ F'(x,\,y)) \sim (F(x),\ G'(y,\,x))$$

übergeht, und da jetzt gezeigt ist, dass eine Congruenz nach einem dieser Modulsysteme durch eine Congruenz nach dem einfachen Modul $H(s)$ ersetzt werden kann und umgekehrt, so folgt, dass jede die Irrationalitäten ξ und

η enthaltende richtige Gleichung, wenn man ξ und η durch passende ganze Functionen von z ersetzt, in eine richtige Congruenz mod. $H(z)$ übergeht. Versteht man also unter Φ eine ganze Function, deren Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{R})$ angehören, so sind die vier Relationen

$$\Phi(\xi, \eta) = 0,$$
$$\Phi(x, y) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F(x),\ G'(y, x)),$$
$$\Phi(x, y) \equiv 0 \quad (\text{modd. } F'(x, y),\ G(y)),$$
$$\Phi(F_1(z),\ G_1(z)) \equiv 0 \quad (\text{mod. } H(z))$$

völlig gleichbedeutend, sodass aus einer von ihnen stets die drei übrigen folgen. Damit ist definitiv arithmetisch formulirt und bewiesen,

dass der durch Adjunction zweier Irrationalitäten ξ und η definirte Rationalitätsbereich mit dem durch Adjunction der linearen Verbindung $u\xi + v\eta$ definirten identisch ist.

Hieraus folgt offenbar sofort, dass die Adjunction beliebig vieler Irrationalitäten durch die Adjunction einer einzigen ersetzt werden kann. Die directe Betrachtung des allgemeinen Falles liefert ähnliche, aber allgemeinere Aequivalenzen von Modulsystemen, wie die Entwickelungen des Art. 11; diese leichte Verallgemeinerung soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

September 1886.

(Fortsetzung folgt.)

Beitrag zur Theorie gewisser complexer Zahlen.

(Von Herrn *K. Schwering* in Coesfeld.)

In einem Aufsatze betitelt: „Zur Theorie der *Abel*schen Gleichungen" theilt Herr *Kronecker* (dieses Journal Bd. 93, S. 346 ff.) eine Reihe von Formeln mit, welche von *Jacobi* herrühren.

Dieselben sind als Vorbereitung zu einer Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$ durch ein Product conjugirter $\psi(\alpha)$ aufzufassen. Diese Darstellung unterzieht Herr *Kronecker* einer eingehenden Untersuchung, und seine Methode setzt ihn in den Stand, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzuzeigen, von deren Erfüllung die *Jacobi*sche Aufgabe abhängt. Durch die Bemerkungen *Kroneckers* hat folglich die von *Jacobi* gestellte Frage eine allseitig genügende Antwort erhalten.

Nun hat Herr *Kummer* (dieses Journal Bd. 35) die Functionen $(\alpha, x)^\lambda$ und $\psi(\alpha)$ in ihre realen oder idealen Primfactoren zerlegt. Hiermit ist die Frage nahe gelegt, ob nicht von dieser Factorenzerlegung aus ein Zugang zu der Aufgabe *Jacobis* und ihrer durch *Kronecker* gegebenen Lösung zu finden sei. Diesen Weg habe ich eingeschlagen und bin in der That an das gewünschte Ziel gelangt. Ich werde jedoch die betreffenden Untersuchungen nicht ausführlich mittheilen, sondern mich darauf beschränken, den interessanten Satz, der diese Beziehung enthält, aufzustellen und *rein arithmetisch* zu beweisen. Dagegen werde ich einige Betrachtungen über die Factorenzerlegung der ψ genauer darzulegen mir erlauben. Dieselben scheinen mir nämlich geeignet, die Factorenzerlegung der ψ einfacher als bisher darzustellen. Ich werde diesen Vortheil an einigen Beispielen, welche die *Darstellung der Quotienten der Primfactoren* betreffen, zu zeigen versuchen. Bekanntlich hat auch *Kummer*, und zwar am Schluss seiner bereits erwähnten Abhandlung im 35. Bande dieses Journals sich mit diesen Quotienten eingehend beschäftigt.

§ 1.

Sei

$$(1.)\qquad \psi_{\nu,\mu}(\alpha) = \sum_{1}^{p-2}{}_m\, \alpha^{\nu\,\mathrm{ind}\,m+\mu\,\mathrm{ind}\,(m+1)}.$$

Im übrigen verweise ich bezüglich der Bezeichnungen auf meinen kleinen Aufsatz (dieses Journal, Bd. 93, S. 334), wo dieselben erklärt sind.

Ersetzen wir in dieser Gleichung α durch $g^{n.\frac{p-1}{\lambda}}$, so wird

$$\psi_{\nu,\mu}(g^{n.\frac{p-1}{\lambda}}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p),$$

wenn

$$(n\nu)+(n\mu) < \lambda$$

ist. Die Einklammerung bedeutet, dass die kleinsten positiven Reste mod. λ genommen werden sollen. Gehört nun der Primtheiler $\pi(\alpha)$ zu der Congruenzwurzel $g^{\frac{p-1}{\lambda}}$, sodass

$$(2.)\qquad \pi(g^{\frac{p-1}{\lambda}}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p),$$

ist ferner

$$\psi_{\nu,\mu}(g^{n.\frac{p-1}{\lambda}}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p),$$

so hat $\psi_{\nu,\mu}(\alpha)$ ***denjenigen Primfactor*** $\pi(\alpha^m)$, welcher so beschaffen ist, dass

$$\pi(g^{mn.\frac{p-1}{\lambda}}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\, p).$$

Dies kann nur der Fall sein, wenn

$$(3.)\qquad mn \equiv 1 \quad (\mathrm{mod.}\, \lambda).$$

Hiernach erhalten wir folgende ***einfache Regel, um die Primtheiler von*** $\psi_{\nu,\mu}(\alpha)$ ***ihrer Form nach zu ermitteln:***

Man bilde drei Zeilen von Zahlen. Die erste enthält die Zahlen

$$x = 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ \ldots,\ \ \lambda-1.$$

Die zweite enthält die Zahlen

$$\nu x = 1.\nu,\ \ 2.\nu,\ \ 3.\nu,\ \ \ldots\ \ (\lambda-1).\nu,$$

bezüglich die kleinsten positiven Reste mod. λ.

Die dritte enthält die analogen Zahlen μx. Man addire nun die entsprechenden Zahlen der zweiten und dritten Reihe und verwerfe diejenigen, welche $> \lambda$ sind. Jetzt schreibe man die Zahlen der ersten Reihe auf, welche den übrigbleibenden entsprechen und bestimme zu jeder Zahl,

die wir y nennen wollen, die entsprechende z, so dass

$$yz \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Dann ist $\pi(\alpha^z)$ ***ein Primtheiler von*** $\psi_{\nu,\mu}(\alpha)$.

Zahlenbeispiel. $\lambda = 11$, $\psi_{2,3}(\alpha)$.

$x =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
$x\nu =$	2,	4,	6,	8,	10,	1,	3,	5,	7,	9.
$x\mu =$	3,	6,	9,	1,	4,	7,	10,	2,	5,	8.
	5,	10,		9,		8,		7.		
$y =$	1,	2,	4,	6,	8.					
$z =$	1,	6,	3,	2,	7.					

Dann ist, wenn $E(\alpha)$ eine complexe Einheit,

$$\psi_{2,3}(\alpha) = E(\alpha).\pi(\alpha).\pi(\alpha^6).\pi(\alpha^3).\pi(\alpha^2).\pi(\alpha^7).$$

Und ebenso ist allgemein:

$$(4.) \qquad \psi_{\nu,\mu}(\alpha) = E(\alpha).\Pi\pi(\alpha^z).$$

Dies sind, in veränderter Darstellung, die Resultate, zu denen ***Kummer*** S. 362 seines Aufsatzes gelangt.

Die Einheit $E(\alpha)$ kann nun noch näher bestimmt werden. Das Product (4) enthält $\frac{\lambda-1}{2}$ Factoren. Bildet man die conjugirte $\psi_{\nu,\mu}(\alpha^{-1})$, so muss, weil

$$\psi_{\nu,\mu}(\alpha).\psi_{\nu,\mu}(\alpha^{-1}) = p = \Pi\pi(\alpha^z).\Pi\pi(\alpha^{-z})$$

ist,

$$E(\alpha).E(\alpha^{-1}) = 1$$

sein. Daher kann $E(\alpha)$ nur die Form $\pm\alpha^m$ haben, wie ***Kummer*** in seiner berühmten Gelegenheitsschrift zur Säcularfeier der Königsberger Universität gezeigt hat. Vgl. auch ***Kronecker***s Doctordissertation, wieder abgedruckt in diesem Journal Bd. 93, S. 23. In der Bestimmung dieser Einheit ist später ***Kummer*** noch einen Schritt weiter gegangen. Er ertheilt dem Primfactor $\pi(\alpha)$ die Form, dass

$$\pi(\alpha) \equiv \pi(1) \pmod{(1-\alpha)^2}.$$

Dann zeigt sich (dieses Journal, Bd. 44, S. 103), dass $E(\alpha)$ sich in ± 1 verwandelt. Erinnert man sich nun meines von mir oben erwähnten kleinen Aufsatzes, so ist darin gezeigt worden, dass man immer die Congruenz hat:

$$\psi_{\nu,\mu}(\alpha) \equiv -1 \pmod{(1-\alpha)^3}.$$

Demnach ist auch:

$$-1 \equiv \pm(\pi(1))^{\frac{\lambda-1}{2}} \pmod{(1-\alpha)^2}.$$

Folglich kann man über das Vorzeichen $\pm$ in nachstehender Weise bestimmt entscheiden:

Ist $\pi(1)$ ***quadratischer Rest*** mod. λ, so ist

$$(\pi(1))^{\frac{\lambda-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

folglich

$$(5.) \qquad \psi_{\nu,\mu}(\alpha) = -\Pi\pi(\alpha^{\iota}).$$

Ist dagegen $\pi(1)$ ***quadratischer Nichtrest*** mod. λ, so ist

$$(6.) \qquad \psi_{\nu,\mu}(\alpha) = +\Pi\pi(\alpha^{\iota}).$$

Wir haben hier stillschweigend angenommen, dass $\pi(\alpha)$ eine wirkliche complexe Zahl ist. Bezüglich der idealen $\pi(\alpha)$ verweisen wir auf die Arbeit ***Kummers***. Die Aenderung besteht lediglich darin, dass man auf beiden Seiten der Gleichungen (5.) und (6.) die Potenz nimmt, welche *Kummer* mit H bezeichnet. Es scheint nicht zweckmässig, durch Multiplication mit Einheiten $\pi(\alpha)$ noch eine andere Form zu geben, sodass etwa die Zweideutigkeit des Vorzeichens ganz wegfiele. Für die uns beschäftigenden Untersuchungen dürfen wir sogar dem Vorgange ***Kummers*** uns anschliessen und zum Zweck einfacherer Schreibung das Doppelvorzeichen unterdrücken.

§ 2.

In den meisten Fragen der höheren Zahlentheorie kommt es weniger auf die *Werthe* der Primfactoren als auf ihre *Beziehungen zu einander* an. Als Beleg für diese Behauptung erlaube ich mir die Thatsache selbst der Einführung idealer Zahlen zu nennen. Es wird daher von nicht geringem Vortheil sein, wenn es gelingt, auch in der Schreibweise von allem Ueberflüssigen Umgang zu nehmen. Nun ist jedes $\pi(\alpha^{\iota})$ durch die zugehörige Zahl y hinreichend bestimmt. Mithin schreiben wir

$$(7.) \qquad \pi(\alpha^{\iota}) = (y).$$

Hierdurch wird es uns sofort möglich, für einfachere ν, μ sogar die Factorenzerlegung der Functionen $\psi_{\nu,\mu}(\alpha)$ wirklich niederzuschreiben.

So ist

$$(8.) \qquad \psi_{1,1}(\alpha) = (1).(2).(3)\ldots\left(\frac{\lambda-1}{2}\right),$$

$$(9.)\quad \begin{cases} \psi_{1,2}(\alpha) = (1).(2).(3)\ldots\left(E\frac{\lambda}{3}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\ldots\left(E\frac{2\lambda}{3}\right), \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} \psi_{1,3}(\alpha) = (1).(2).(3)\ldots\left(E\frac{\lambda}{4}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(E\frac{\lambda+2}{3}\right)\ldots\left(E\frac{\lambda}{2}\right) \\ \qquad\qquad \times\left(E\frac{2\lambda+2}{3}\right)\ldots\left(E\frac{3\lambda-1}{4}\right). \end{cases}$$

$E\frac{\lambda}{4}$ bedeutet in bekannter Weise die grösste ganze Zahl, welche ***nicht grösser*** als $\frac{\lambda}{4}$ ist.

So ist für $\lambda = 23$

$$\psi_{1,2}(\alpha) = (1).(2).(3).(4).(5).(6).(7).(12).(13).(14).(15),$$
$$\psi_{1,3}(\alpha) = (1).(2).(3).(4).(5).(8).(9).(10).(11).(16).(17).$$

Um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich, dass, wenn α durch α^m ersetzt wird, rechts die Zahlen (k) sich in $(m'k)$ verwandeln, wo $mm' \equiv 1$ (mod. λ). Ist daher γ eine primitive Wurzel (mod. λ) und

$$\psi_{\nu,\mu}(\alpha) = (\gamma^{n_1})(\gamma^{n_2})\ldots(\gamma^{n_\nu}), \quad \nu = \frac{\lambda-1}{2},$$

so wird:

$$\psi_{\nu,\mu}(\alpha^{\gamma^k}) = (\gamma^{n_1-k}).(\gamma^{n_2-k})\ldots(\gamma^{n_\nu-k}).$$

So ist z. B. für $\lambda = 23$, s. o.

$$\psi_{1,2}(\alpha^{10}) = (7).(14).(21).(5).(12).(19).(3).(15).(22).(6).(13),$$

weil $7.10 \equiv 1$ (mod. 23).

Die von *Kummer* durchgeführte Zerlegung der Function $(\alpha, x)^\lambda$ sieht daher in unserer Schreibweise so aus:

$$(11.)\qquad (\alpha,\ x)^\lambda = p\,\Pi_m (m)^{\lambda-1-m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, \lambda-2).$$

Der Quotient zweier willkürlicher ψ-Functionen hat immer die Form:

$$(12.)\qquad \frac{\psi_{\nu,\mu}(\alpha^k)}{\psi_{\varrho,\sigma}(\alpha^k)} = \Pi_m \frac{(m)}{(\lambda-m)}.$$

Denn zunächst fallen die Factoren, welche $\psi_{\nu,\mu}(\alpha^k)$ und $\psi_{\varrho,\sigma}(\alpha^k)$ gemeinsam haben, fort. Hat nun der Zähler den Factor (m), der Nenner aber nicht, so hat letzterer den Factor $(\lambda-m)$.

Wir wollen künftig statt $\psi_{1,h}(\alpha)$ einfach $\psi_h(\alpha)$ schreiben und erhalten:

$$\psi_h(\alpha) = \Pi(m_h).$$

Die Zahlen m_h sind Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, ..., $\lambda-1$ und zwar im ganzen $\frac{\lambda-1}{2}$ *verschiedene*. Ferner wird:

$$(\alpha,\ x)^\lambda = p.\psi_h^{\lambda-2}(\alpha).\Pi\frac{(m_h)^{\lambda-1-m_h}.(\lambda-m_h)^{m_h-1}}{(m_h)^{\lambda-2}}.$$

Daher

$$(13.)\qquad (\alpha,\ x)^\lambda = p.\psi_h^{\lambda-2}(\alpha).\Pi\frac{(\lambda-m_h)^{m_h-1}}{(m_h)^{m_h-1}}.$$

m_h durchläuft die in den Factoren von $\psi_h(\alpha)$ auftretenden verschiedenen $\frac{\lambda-1}{2}$ Zahlwerthe. Die Lösung der *Jacobi*schen Aufgabe auf dem von uns gewählten Wege gelingt nun durch Bestimmung der $\frac{\lambda-1}{2}$ Unbekannten

$$\frac{(m)}{(\lambda-m)}.$$

Den Ansatz der hierzu führenden $\frac{\lambda-1}{2}$ Gleichungen finden wir wie folgt. Wir bilden den Quotienten zweier ψ_h verschiedenen Arguments aber derselben Charakteristik h. Wie einfach diese Bestimmung in der Praxis bei nicht zu grossem λ ausfällt, möge für $\lambda = 17$ und $h = 2$ gezeigt werden, wo, wie immer, ψ_h für $\psi_{1,h}$ und ψ_2 für $\psi_{1,2}(\alpha) = \frac{(\alpha, x).(\alpha^2, x)}{(\alpha^3, x)}$ gesetzt ist. Ich greife dies Beispiel heraus, weil in der Mittheilung von Herrn *Kronecker* (S. 347 der oben citirten Abhandlung) $(\alpha, x)^{17}$ durch ψ_3 und nicht durch ψ_2 ausgedrückt ist. Man findet:

$$\psi_2(\alpha) = (1).(2).(3).(4).(5).(9).(10).(11),$$
$$\psi_2(\alpha^2) = (9).(1).(10).(2).(11).(13).(5).(14).$$

Bezeichnen wir kurz

$$\frac{(m)}{(\lambda-m)} = x_m,$$

so wird

$$x_3.x_4 = \frac{\psi_2(\alpha)}{\psi_2(\alpha^2)},\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\psi_2(\alpha^2)}{\psi_2(\alpha^4)}\quad \text{u. s. w.}$$

Die Elimination liefert

$$x_1 = \frac{1}{p^3}\cdot\psi_2(\alpha^2).\psi_2(\alpha^3).\psi_2(\alpha^5).\psi_2(\alpha^7).\psi_2(\alpha^9).\psi_2(\alpha^{16}).$$

Nach (13.) hat man:

$$(\alpha,\ x)^{17} = p.\psi_2^{15}(\alpha)\cdot\frac{x_6^{10}.x_7^9.x_8^8}{x_2.x_3^2.x_4^3.x_5^4},$$

und nach Einsetzung der Werthe der x_m:

$$(\alpha, x)^{17} = \frac{1}{p^{10}} \cdot \psi_2(\alpha^9).\psi_2^2(\alpha^{13}).\psi_2^3(\alpha^3).\psi_2^4(\alpha^{15}).\psi_2^5(\alpha^{12}).\psi_2^6(\alpha^{10}).\psi_2^7(\alpha^{11}).\psi_2^9(\alpha).$$

Für $\lambda = 23$ hat *Jacobi* wieder die Darstellung durch ψ_3 gewählt. Hier gelingt es schon nicht mehr, $x_1 = \frac{(1)}{(22)}$ rational durch die ψ auszudrücken, wohl aber x_1^3. Man hat nämlich:

$$x_1^3 = \frac{1}{p^7} \cdot \psi_2(\alpha).\psi_2(\alpha^2).\psi_2(\alpha^3).\psi_2(\alpha^4).\psi_2(\alpha^6).\psi_2(\alpha^9).\psi_2(\alpha^{13}).\psi_2(\alpha^{16})$$
$$.\psi_2^2(\alpha^5).\psi_2^2(\alpha^{11}).\psi_2^2(\alpha^{15}).$$

Setzt man in $(\alpha, x)^{23}$ ein, so geht die dritte Wurzel rational heraus und man findet:

$$(\alpha, x)^{23} = \frac{1}{p^{35}} \cdot \Pi \psi_2^a(\alpha^b),$$

wo

$$\begin{array}{rlllllllllll} b = & 15, & 19, & 5, & 21, & 3, & 14, & 12, & 17, & 13, & 16, & 1. \\ a = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. & 9, & 10, & 11, & 15. \end{array}$$

Ich habe nach dieser Methode die sämmtlichen von Herrn *Kronecker* angeführten Beispiele behandelt und erlaube mir hier einen Druckfehler in der Darstellung von $(\alpha, x)^{23}$ anzumerken, den übrigens die *Jacobi*sche Regel sofort aufdeckt. Der Exponent von $\psi_3(\alpha^{17})$ muss 11 und nicht 10 sein.

§ 3.

Wir gehen jetzt an die allgemeine Lösung der Aufgabe. Wir betrachten zunächst die Primfactoren von $\psi_2(\alpha)$ genauer.

1. Sei $\lambda = 12k+1$. Dann ist unter Weglassung des Index

$$\psi(\alpha) = (1).(2).(3)\dots(4k)\times(6k+1).(6k+2)\dots(8k),$$
$$\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}}) = (2).(4).(6)\dots(8k)\times \quad (1). \quad (3)\dots(4k-1).$$

Demnach wird

$$(14.) \quad \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}})} = \frac{(6k+1)}{(6k)} \cdot \frac{(6k+3)}{(6k-2)} \cdots \frac{(8k-1)}{(4k+2)}.$$

Die Anzahl der Factoren rechterseits ist $E\frac{\lambda}{12}$.

2. $\lambda = 12k+5$.

Wir erhalten:

$$\psi(\alpha) = (1).(2).(3)\dots(4k+1)\times(6k+3).(6k+4)\dots(8k+3),$$

$$\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}}) = (2).(4).(6)\dots(8k+2)\times \quad (1). \quad (3)\dots(4k+1),$$

$$(15.)\qquad \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}})} = \frac{(6k+3)}{(6k+2)}\cdot\frac{(6k+5)}{(6k)}\cdots\frac{(8k+3)}{(4k+2)}.$$

Die Anzahl der Factoren ist $1+E\frac{\lambda}{12}$.

3. $\lambda = 12k+7$.

$$\psi(\alpha) = (1).(2).(3)\dots(4k+2)\times(6k+4).(6k+5)\dots(8k+4),$$

$$\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}}) = (2).(4).(6)\dots(8k+4)\times \quad (1). \quad (3)\dots(4k+1),$$

$$(16.)\qquad \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}})} = \frac{(6k+5)}{(6k+2)}\cdot\frac{(6k+7)}{(6k)}\cdots\frac{(8k+3)}{(4k+4)}.$$

Anzahl der Factoren $E\frac{\lambda}{12}$.

4. $\lambda = 12k+11$.

$$\psi(\alpha) = (1).(2).(3)\dots(4k+3)\times(6k+6).(6k+7)\dots(8k+7),$$

$$\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}}) = (2).(4).(6)\dots(8k+6)\times \quad (1). \quad (3)\dots(4k+3),$$

$$(17.)\qquad \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\frac{\lambda+1}{2}})} = \frac{(6k+7)}{(6k+4)}\cdot\frac{(6k+9)}{(6k+2)}\cdots\frac{(8k+7)}{(4k+4)}.$$

Anzahl der Factoren $1+E\frac{\lambda}{12}$.

Ist die Anzahl der Factoren gleich Eins, so ist die Aufgabe, den Quotienten zweier Primfactoren $\frac{\pi(\alpha)}{\pi(\alpha^{-1})}$ durch die ψ auszudrücken, sofort gelöst. Dies ist der Fall für $\lambda = 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 19$. Die beiden ferneren Fälle $\lambda = 17$ und $\lambda = 23$ haben vorhin ihre Lösung gefunden. Der nächste würde $\lambda = 29$ sein. Wir übergehen denselben vorläufig, weil er zu einfach ist, und wenden uns zu dem Falle $\lambda = 37$.

Die Behandlung desselben wird nämlich unsere Methode in ein so helles Licht setzen, dass wir die allgemeine Lösung aus dem beobachteten Verfahren ohne Mühe erschliessen können. Doch wollen wir das erhaltene Resultat, welches die allgemeine Lösung darbietet, auf einem andern Wege bestätigen

$$\lambda = 37, \quad \gamma = 2.$$

Es ist

$$\psi(\alpha) = (1).(2).(3).(4).(5).(6).(7).(8).(9).(10)$$
$$.(11).(12).(19).(20).(21).(22).(23).(24),$$
$$\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{19})} = \frac{(19)}{(18)}\cdot\frac{(21)}{(16)}\cdot\frac{(23)}{(14)} = \frac{(\gamma^{35})}{(-\gamma^{35})}\cdot\frac{(\gamma^{22})}{(-\gamma^{22})}\cdot\frac{(\gamma^{15})}{(-\gamma^{15})}.$$

Wir nehmen an, die Aufgabe sei gelöst und die Lösung in die Form gebracht:

$$2t\log\frac{(1)}{(-1)} = a_0\log\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}+a_1\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma})}{\psi(\alpha^{-\gamma})}+a_2\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^2})}{\psi(\alpha^{-\gamma^2})}+\cdots$$
$$\cdots+a_{17}\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{17}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{17}})}.$$

Dabei bedeutet t eine gewisse noch zu ermittelnde Zahl. $a_0, a_1, \ldots a_{17}$ oder allgemein $a_0, a_1, \ldots a_{\frac{\lambda-3}{2}}$ sind die $\frac{\lambda-1}{2}$ Unbekannten der neu aufzustellenden Gleichungen. Dann wird:

$$2t\log\frac{(\gamma^{35})}{(-\gamma^{35})} = a_0\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma})}{\psi(\alpha^{-\gamma})}+a_1\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^2})}{\psi(\alpha^{-\gamma^2})}+\cdots$$
$$\cdots+a_{16}\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{17}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{17}})}-a_{17}\log\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})},$$
$$2t\log\frac{(\gamma^{22})}{(-\gamma^{22})} = a_0\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{14}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{14}})}+\cdots+a_3\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{17}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{17}})}-a_4\log\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}-\cdots$$
$$\cdots+a_{17}\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{13}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{13}})},$$
$$2t\log\frac{(\gamma^{15})}{(-\gamma^{15})} = -a_0\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^3})}{\psi(\alpha^{-\gamma^3})}-\cdots-a_{14}\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{17}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{17}})}+a_{15}\log\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}+\cdots$$
$$\cdots+a_{17}\log\frac{\psi(\alpha^{\gamma^2})}{\psi(\alpha^{-\gamma^2})}.$$

Die Addition muss ergeben

$$2t\log\psi(\alpha)-2t.\log\psi(\alpha^{\gamma^{35}}) = t.\log\left[\psi(\alpha)\cdot\frac{p}{\psi(\alpha^{-1})}\right]-t\log\left[\psi(\alpha^{\gamma^{35}})\cdot\frac{p}{\psi(\alpha^{-\gamma^{35}})}\right]$$
$$= t\log\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}\cdot\frac{\psi(\alpha^{\gamma^{17}})}{\psi(\alpha^{-\gamma^{17}})}.$$

Daraus ergeben sich die nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rclrcl}
-a_{17}-a_4+a_{15} &=& t, & a_8-a_{13}-a_6 &=& 0,\\
a_0-a_5+a_{16} &=& 0, & a_9-a_{14}-a_7 &=& 0,\\
a_1-a_6+a_{17} &=& 0, & a_{10}-a_{15}-a_8 &=& 0,\\
a_2-a_7-a_0 &=& 0, & a_{11}-a_{16}-a_9 &=& 0,\\
a_3-a_8-a_1 &=& 0, & a_{12}-a_{17}-a_{10} &=& 0,\\
a_4-a_9-a_2 &=& 0, & a_{13}+a_0-a_{11} &=& 0,\\
a_5-a_{10}-a_3 &=& 0, & a_{14}+a_1-a_{12} &=& 0,\\
a_6-a_{11}-a_4 &=& 0, & a_{15}+a_2-a_{13} &=& 0,\\
a_7-a_{12}-a_5 &=& 0, & a_{16}+a_3-a_{14} &=& t.
\end{array}$$

Dass gerade die letzte Gleichung die rechte Seite t erhält, ist Zufall. Allgemein aber bleibt richtig, dass nur zwei Gleichungen die rechte Seite t, alle übrigen Null haben. Ferner geht allgemein jede folgende Gleichung aus der vorhergehenden durch Erhöhung des Index um eine Einheit hervor, und a_{18} oder allgemein $a_{\frac{\lambda-1}{2}}$ ist $-a_0$. Unser System ist also dem von *Kronecker* (dieses Journal Bd. 93, S. 350) behandelten genau analog, und auch hier wäre a_r mit $a_{r+\lambda-1}$ genau identisch, da $a_{r+\nu} = -a_r$ ist. $\left(\nu = \frac{\lambda-1}{2}\right)$.

Zur Auflösung des Systems bedienen wir uns derselben Methode wie *Kronecker* a. a. O. Wir setzen

$$\beta^{18} = -1$$

und multipliciren die obigen Gleichungen der Reihe nach mit $1, \beta, \beta^2, \dots \beta^{17}$ und addiren darauf. Dann wird:

$$(\beta+\beta^{14}-\beta^3)(a_0+a_1\beta+a_2\beta^2+\dots+a_{17}\beta^{17}) = t(1+\beta^{17}),$$

oder

$$(18.)\quad (1+\beta^{13}-\beta^2)(a_0+a_1\beta+a_2\beta^2+\dots+a_{17}\beta^{17}) = t(1-\beta)\beta^{16}.$$

Wir haben also nun die *Norm* der complexen Zahl $1+\beta^{13}-\beta^2$

$$N(1+\beta^{13}-\beta^2)$$

zu bilden und mit demjenigen Factor beiderseits zu multipliciren, welcher $1+\beta^{13}-\beta^2$ zu einer reellen ganzen Zahl macht. Verstehen wir unter β eine *primitive Wurzel* der Gleichung $\beta^{18} = -1$, so sind

$$\beta,\quad \beta^5,\quad \beta^7,\quad \beta^{11},\quad \beta^{13},\quad \beta^{17}$$

und

$$-\beta,\quad -\beta^5,\quad -\beta^7,\quad -\beta^{11},\quad -\beta^{13},\quad -\beta^{17}$$

Wurzeln der irreductiblen Gleichung zwölften Grades

$$(19.)\quad \beta^{12}-\beta^6+1 = 0.$$

Bilden wir die entsprechenden zwölf conjugirten Zahlen zu $1+\beta^{13}-\beta^2$ und ermitteln deren Product, so ergiebt sich 37. Denken wir uns nun in der Gleichung (18.) alle höheren Potenzen von der zwölften aufwärts durch die Gleichung (19.) weggeschafft, so ist die Coefficientenvergleichung gestattet und die achtzehn Unbekannten reduciren sich auf sechs. Um diese zu bestimmen, beachten wir, dass die Gleichung $\beta^{18} = -1$ sich darstellen lässt durch:

$$(20.)\quad (\beta^2+1)(\beta^4-\beta^2+1)(\beta^{12}-\beta^6+1) = 0$$

und dass die Gleichung (18.) für jede Wurzel β gilt. Nehmen wir nun diejenigen Wurzeln, welche der Gleichung $\beta^6 = -1$, folglich auch

$$(21.)\quad \beta^4-\beta^2+1 = 0$$

genügen, so verwandelt sich $1+\beta^{13}-\beta^2$ in $1+\beta-\beta^2$. Die obige Rechnung zeigte uns, dass t den Factor 37 hat; wir setzen also $t = 37t'$, und aus (18.) wird:

$$(1+\beta-\beta^2)(a_0+a_1\beta+a_2\beta^2+a_3\beta^3+a_4\beta^4+a_5\beta^5-a_6-a_7\beta-a_8\beta^2-a_9\beta^3-a_{10}\beta^4$$
$$-a_{11}\beta^5+a_{12}+a_{13}\beta+a_{14}\beta^2+a_{15}\beta^3+a_{16}\beta^4+a_{17}\beta^5) = 37t'(1-\beta)\beta^4.$$

Entfernt man mit Hülfe von (21.) alle Potenzen von der vierten aufwärts, so erhält man vier weitere Gleichungen. Es bleiben zwei Unbekannte. Da

$$(1+\beta-\beta^2)(1+\beta^5-\beta^{10}) = 2\beta^3,$$

so braucht man vorher nur mit $1+\beta^5-\beta^{10}$ zu multipliciren und erhält für t' den Divisor 2, also $t' = 2t''$.

Endlich bleibt die Gleichung:

$$(22.)\quad \beta^2+1 = 0$$

zu untersuchen. Hier findet man $\beta = i$ und

$$(2+i)\sum_0^{17} a_h . i^h = 2.37.t''(1-i).$$

Dies sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Aufgabe ist gelöst. Es ist $t'' = 5$.

Die Rechnung selbst ist einfacher als sie nach dieser Darstellung zu sein scheint.

Das Resultat ist:

$$2.2.5.37.\log\frac{(1)}{(-1)} = \sum_0^{17} a_h.\log\frac{\psi(\alpha^{r^h})}{\psi(\alpha^{-r^h})},$$

$a_0 = -39$, $a_3 = 53$, $a_6 = -91$, $a_9 = -123$, $a_{12} = -89$, $a_{15} = 83$,
$a_1 = 67$, $a_4 = -129$, $a_7 = 33$, $a_{10} = 69$, $a_{13} = 77$, $a_{16} = 161$,
$a_2 = -6$, $a_5 = 122$, $a_8 = -14$, $a_{11} = 38$, $a_{14} = -156$, $a_{17} = -158$.

Die Lösung der allgemeinen Aufgabe können wir aus dem Vorstehenden erschliessen. Sie lautet:

Sei

$$(23.)\quad 2t\log\frac{(1)}{(-1)} = \sum_0^{\nu-1} a_h.\log\frac{\psi(\alpha^{r^h})}{\psi(\alpha^{-r^h})} \qquad \left(\nu=\frac{\lambda-1}{2}\right).$$

Ferner sei

$$(24.)\qquad \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\gamma^m})} = \frac{(\gamma^{-n_1})}{(-\gamma^{-n_1})}\cdot\frac{(\gamma^{-n_2})}{(-\gamma^{-n_2})}\cdots\frac{(\gamma^{-n_r})}{(-\gamma^{-n_r})},$$

m ist zwar willkürlich, aber für die Function $\psi_2(\alpha)$ nehmen wir $m = \frac{\lambda+1}{2}$, weil dann r möglichst klein ist, nämlich

$$r \overline{\overline{<}} E\left(\frac{\lambda}{12}\right)+1.$$

Dann wird

$$(25.)\qquad (1-\beta^m)t = (\beta^{n_1}+\beta^{n_2}+\cdots+\beta^{n_r})\sum_{0}^{\nu-1}{}_h a_h.\beta^h.$$

Dabei ist

$$(26.)\qquad \beta^\nu = -1.$$

Wir zerlegen die im Allgemeinen *nicht irreductible* Gleichung (26.) in ihre irreductiblen Factoren

$$\varphi(\beta).\varphi_1(\beta).\varphi_2(\beta)\ldots\varphi_s(\beta) = 0.$$

Dann zerfällt die Lösung von (25.) in $s+1$ Theile. *Für jeden Factor* $\varphi_h(\beta) = 0$ *ist die Norm*

$$N(\beta^{n_1}+\beta^{n_2}+\cdots+\beta^{n_r})$$

auszurechnen, und das Product dieser Normen ist die Zahl t.

Nur dann tritt hierin eine Modification ein, wenn schon ein Theil der complexen Multiplicatoren sich bei Bildung der Norm als ganze Zahl multiplicirt mit einer complexen Einheit darstellt, wie dies bei unserem Beispiele einmal eintrat.

Die Lösung der *Jacobi*schen Aufgabe ist durch diese Ausführungen im Hinblick auf Gleichung (13.) sofort gegeben. Wir überlassen es dem Leser, ihren Ausdruck niederzuschreiben. Allein eine Bemerkung wollen wir, wie wir schon in der Einleitung ankündigten, nicht unterdrücken. Die Gleichung (13.) zeigt, dass bei der Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$ die Potenzen der ψ aus den $\frac{\pi(\alpha)}{\pi(\alpha^{-1})}$ *ganzzahlig* hervorgehen, dass also bei der Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$ durch die ψ *die Exponenten der ψ keine andern Nenner besitzen können als die Zahl t oder Divisoren von t.* Nun hat *Kronecker* in der öfter citirten Abhandlung gezeigt, dass diese Nenner der Exponenten der conjugirten ψ für die Function ψ_h folgende Form haben:

Sei

$$h \equiv \gamma^m \text{ (mod. } \lambda), \quad 1+h \equiv \gamma^l \text{ (mod. } \lambda).$$

Dann wird dieser Nenner durch Ausrechnung der Norm

$$N(1-\beta^l+\beta^m)$$

näher bestimmt.

Folglich muss zwischen den Zahlen $1-\beta^l+\beta^m$ und $\beta^{n_1}+\beta^{n_2}+\cdots+\beta^{n_r}$ eine Beziehung existiren. Diese Beziehung werden wir im nächsten Paragraphen als arithmetischen Satz aufstellen und beweisen.

Vorher wollen wir unser obiges Verfahren bestätigen.

Aus

$$\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{\gamma^m})} = \frac{(\gamma^{-n_1})}{(-\gamma^{-n_1})}\cdots\frac{(\gamma^{-n_r})}{(-\gamma^{-n_r})}$$

folgt:

$$\frac{\psi(\alpha^{\gamma^k})}{\psi(\alpha^{\gamma^{m+k}})} = \frac{(\gamma^{-n_1-k})}{(-\gamma^{-n_1-k})}\cdots\frac{(\gamma^{-n_r-k})}{(-\gamma^{-n_r-k})}.$$

Daher, wenn man logarithmirt und mit $1, \beta, \ldots \beta^{\nu-1}$ multiplicirt,

$$(27.)\qquad (1-\beta^{-m})\sum_0^{\nu-1}\beta^k\log\psi(\alpha^{\gamma^k}) = (\beta^{-n_1}+\beta^{-n_2}+\cdots+\beta^{-n_r}).\sum_0^{\nu-1}\beta^k.\log\frac{(\gamma^{-k})}{(-\gamma^{-k})}.$$

Der Factor 2 in Gleichung (23.) rührt von der Einführung der ***Quotienten*** der ψ her.

Wenn $\beta^{n_1}+\beta^{n_2}+\cdots+\beta^{n_r}$ für eins der nicht primitiven β verschwindet, so ist unser Verfahren nicht anwendbar. Dieser Fall muss z. B. eintreten, wenn m einen Divisor mit $\lambda-1$ gemeinsam hat. Man braucht dann nur von dem Quotienten zweier anderer ψ auszugehen, um die Schwierigkeit zu beseitigen. Meist wird man alsdann geradezu von $\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}$ ausgehen. Dabei wird die Zahl, deren Norm zu nehmen ist, allerdings $\frac{\lambda-1}{2}$ Summanden enthalten, also für die numerische Rechnung Schwierigkeiten darbieten. Für $\lambda = 31$ z. B. haben wir, wenn $\gamma = 17$,

$$\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{16})} = \frac{(17)}{(14)}\cdot\frac{(19)}{(12)} = \frac{(\gamma)}{(-\gamma)}\cdot\frac{(\gamma^{22})}{(-\gamma^{22})}.$$

Daher ist

$$m = 18,\quad n_1 = 29,\quad n_2 = 8.$$

Die Norm, welche zu bilden ist, wird

$$N(\beta^8+\beta^{29}) = N(1+\beta^{21});\quad \beta^{15} = -1.$$

Hier verschwindet $1+\beta^{21}$ für $\beta^3 = -1$. Die erste Coefficientenvergleichung

führt zu dem Resultate:

$$\frac{(\gamma^4)}{(-\gamma^4)} = m(\eta_0).\psi(\alpha).\psi(\alpha^{\gamma^{18}}).\psi(\alpha^{\gamma^{24}}),$$

wo

$$\eta_0 = \alpha+\alpha^{\gamma^6}+\alpha^{\gamma^{12}}+\alpha^{\gamma^{18}}+\alpha^{\gamma^{24}}.$$

Setzt man zur Bestimmung von $m(\eta_0)$ in $\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}$ ein, so erhält man nach leichten Rechnungen:

$$m^{27}(\eta_0) = \frac{1}{p^3}\,\frac{\psi(\alpha).\psi(\alpha^{\gamma^2}).\psi(\alpha^{\gamma^4})\dots\psi(\alpha^{\gamma^{28}})}{\{\psi(\alpha).\psi(\alpha^{\gamma^6}).\psi(\alpha^{\gamma^{12}}).\psi(\alpha^{\gamma^{18}}).\psi(\alpha^{\gamma^{24}})\}^{18}}.$$

Für $\lambda = 29$, $\gamma = 2$ hat man zu bilden $N(1+\beta^3-\beta)$, welche sich als 2 herausstellt, da man wie in einem früheren Falle, von Potenzen von 2 absehen kann. Man findet so $t = 2$.

Für $\lambda = 41$, $\gamma = 6$ wird

$$m = 14,\quad n_1 = 26,\quad n_2 = 4,\quad n_3 = 36,\quad n_4 = 35.$$

Die Gleichung (25.) lautet

$$(1-\beta^{14})t = (\beta^{26}+\beta^4+\beta^{36}+\beta^{35})\sum_0^{19} a_h.\beta^h,$$

wo

$$\beta^{20} = -1.$$

Zunächst nehmen wir $\beta^4 = -1$, so wird

$$(1+\beta^2)t = (-2+\beta^2+\beta^3)\sum_0^{19} a_h.\beta^h.$$

Da nun

$$6 = (-2+\beta^2+\beta^3)(-3+\beta-\beta^2-\beta^3),$$

so wird:

$$(1+\beta^2)(-3+\beta-\beta^2-\beta^3)t' = \sum_0^{19}{}_h a_h.\beta^h,\quad t = 6.t'.$$

Dies sind vier Relationen unter den a_h. Wenden wir uns nun dem zweiten Factor der Zerlegung

$$(1+\beta^4)(1-\beta^4+\beta^8-\beta^{12}+\beta^{16}) = 0$$

zu, so ergiebt sich als Norm die Zahl 11, mithin

$$t = 2.3.11.$$

Für $\lambda = 43$, $\gamma = 3$ wird

$$m = 15,\quad n_1 = 26,\quad n_2 = 34,\quad n_3 = 39.$$

Die Gleichung $\beta^{21} = -1$ zerlegt sich in vier Factoren bez. zwölften, sechsten,

zweiten und ersten Grades und die bezüglichen Normen werden 211, 29, 7, 1. Daher

$$t = 7.29.211.$$

Für $\lambda = 47$ wird $m = 16$, $n_1 = 12$, $n_2 = 38$, $n_3 = 3$, $n_4 = 41$ und, da

$$\beta^{12}+\beta^{38}+\beta^{3}+\beta^{41} = \beta^{3}(1-\beta^{6})(1+\beta^{6}+\beta^{9}) \quad \text{für} \quad \beta^{23} = -1,$$

so wird

$$N(1+\beta^{6}+\beta^{9})$$

zu betrachten sein. Hier findet man den Werth $6533 = 47.139$. Die betreffende Coefficientenvergleichung liefert 22 Gleichungen für die 23 Unbekannten $a_0, \dots a_{22}$. Die letzte $\beta = -1$ führt zu einem illusorischen Resultate, da links und rechts in (25.) Null erhalten wird. Setzen wir in $\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})}$ ein, so kommt ein Factor 5 hinzu. Daher

$$t = 5.47.139.$$

§ 4.

Zwei arithmetische Sätze. Sei $\nu = \frac{\lambda-1}{2}$ *ungerade.* Wir betrachten die Summe

$$s = \sum_{1}^{r}{}_h \gamma^{(1+\nu)n_h},$$

wo n_h die Zahlwerthe durchläuft, welche den in $\psi(\alpha)$ auftretenden Factoren entsprechen. Dann sind alle Glieder der Summe, bez. ihre kleinsten positiven Reste mod. λ verschieden. Denn sonst müsste $(1+\nu)n_h \equiv (1+\nu)n_k$ mod. $(\lambda-1)$ sein. Dies ist unmöglich. Denn n_h und n_k sind entweder beide $< \nu$, oder $> \nu$ oder $n_h > \nu > n_k$. In den beiden ersten Fällen ist $n_h - n_k < \nu$, also nicht theilbar durch ν; im letzteren sei $n_h = \nu + n_{h'}$; dann wäre $n_{h'} = n_k$, also $\gamma^{n_h} \equiv -\gamma^{n_k}$. Nun kann aber in keiner ψ-Function neben dem Factor (m) der Factor $(\lambda - m)$ auftreten, weil dies der Gleichung

$$\psi(\alpha).\psi(\alpha^{-1}) = p$$

widersprechen würde. s enthält also die Summe aller quadratischen Reste, welche bekanntlich durch λ theilbar ist. Setzen wir nun $m_h \equiv \gamma^{n_h}$ (mod. λ), so wird

$$(28.) \qquad s \equiv \Sigma(-1)^{n_h}.m_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } \lambda).$$

D. h. *Greift man in* $\psi(\alpha) = \Pi(m_k)$ *diejenigen* m_k, *welche quadratische Reste, und diejenigen, welche quadratische Nichtreste mod.* λ *sind,*

heraus, so ist die Summe der ersteren vermindert um die Summe der letzteren stets durch λ theilbar, falls $\frac{\lambda-1}{2}$ ungerade.

Wir bestimmen jetzt nach Herrn *Kronecker* die Zahlen l und m, welche nach seinen oben citirten Untersuchungen die Function ψ_{1,γ^m} bestimmen. Es ist $\gamma^l \equiv 1+\gamma^m$ mod. λ.

Sei $\gamma^m = h$ und $\zeta^{\lambda-1} = 1$ und

$$P = (1+\zeta^m-\zeta^l)\sum_1^{\lambda-2} m_k.\zeta^{-n_k},$$

wo m_k und n_k durch die Congruenz $m_k \equiv \gamma^{n_k}$ (mod. λ) zusammenhängen und m_k alle Werthe von 1 bis $\lambda-2$ durchläuft. Dann finden wir in der Summe die drei Summanden:

$$m_k.\zeta^{-n_k}, \quad hm_k.\zeta^{-n_k}, \quad (h+1)m_k.\zeta^{-n_k}.$$

Daher enthält das Product P als Coefficienten von ζ^{-n_k}, wenn

$$hm_k = r_1+c.\lambda,$$

$$(h+1)m_k = m_k+r_1+c.\lambda$$

oder

$$m_k+r_1+c.\lambda-\lambda$$

gesetzt wird und r_1 den kleinsten positiven Rest mod. λ bedeutet, entweder:

$$m_k+r_1-(m_k+r_1) = 0$$

oder:

$$m_k+r_1-(m_k+r_1)+\lambda = \lambda.$$

Demnach ist in P der Coefficient von ζ^{-n_k} entweder 0 oder λ.

Das letztere ist nach unserer Regel (S. 57) dann der Fall, wenn (m_k) nicht als Factor im Producte $\psi_{1,h}$ vorkommt. Hiermit ist bewiesen

$$P = \lambda\Sigma\zeta^{\nu-n_h} = -\lambda\Sigma\zeta^{-n_h}.$$

Das letztere gilt unter der Voraussetzung, die wir machen wollen, dass ζ eine *primitive Wurzel* der Gleichung $\zeta^{\lambda-1} = 1$ ist.

Wir haben also den Satz:

$$(1+\zeta^m-\zeta^l)\sum_1^{\lambda-2} m_k.\zeta^{-n_k} = -\lambda\sum_1^r{}_h\,\zeta^{-n_h}.$$

Rechts durchläuft n_h die zur Function $\psi_{1,h}$ gehörigen $r = \frac{\lambda-1}{2}$ Zahlwerthe. Nun ist

$$\sum_1^{\lambda-2} m_k.\zeta^{-n_k} = \Sigma m_h\zeta^{-n_h}+\Sigma(\lambda-m_h)\zeta^{\nu-n_h}$$

$$= 2\Sigma m_h.\zeta^{-n_h}-\lambda\Sigma\zeta^{-n_h}.$$

Daher wird endlich

$$(29.)\qquad 2(1+\zeta^m-\zeta^l)\Sigma m_h.\zeta^{-n_h} = \lambda(\zeta^m-\zeta^l)\Sigma\zeta^{-n_h}.$$

Die Zahlen m, l charakterisiren die Function $\psi_{1,h}$ nach *Kronecker*, die Zahlen m_h oder n_h nach *unseren* Bestimmungen. Den Zusammenhang *beider* giebt Gleichung (29.).

Hat man

$$\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\alpha^{-1})} = \frac{(\gamma^{-n_1})}{(-\gamma^{-n_1})}\cdots\frac{(\gamma^{-n_\nu})}{(-\gamma^{-n_\nu})} = \frac{(\gamma^{-n'_1})}{(-\gamma^{-n'_1})}\cdots\frac{(\gamma^{-n'_r})}{(-\gamma^{-n'_r})},$$

so existirt auch zwischen den $n_1, \ldots, n_\nu$ und $n'_1, \ldots, n'_r$ eine einfache Beziehung, die man aus Gleichung (25.) ableiten kann. Wir übergehen dieselbe.

§ 5.

In dem häufig citirten Aufsatze (Bd. 93, S. 359) sagt Herr *Kronecker*: „Dass, wie *Jacobi* vermuthet zu haben scheint, die von ihm mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreistheilungs-Ausdrücke *stets* als Producte conjugirter ψ-Functionen darstellbar sein sollten, ist nach den oben dafür gefundenen Bedingungen kaum anzunehmen. Denn danach müsste stets eine Zahl m existiren, für welche jede der complexen Zahlen

$$1+\zeta^{km}-\zeta^{k\,\mathrm{ind}\,(1+g^m)},$$

wo ζ eine Wurzel der Gleichung $\zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}+1=0$ bedeutet, entweder eine complexe Einheit oder aber ein Product conjugirter algebraischer Primtheiler von λ ist. Ich habe jedoch noch für keinen Werth von λ feststellen können, dass diese Bedingungen nicht erfüllbar sind. Die erste Primzahl, welche in dieser Beziehung zur Untersuchung geeignet erscheint, ist $\lambda = 83$."

Diese Untersuchung für $\lambda = 83$ hat der Verfasser dieses Aufsatzes durchgeführt und gefunden, dass für $g = 2$ die Norm der complexen Zahl $1+\zeta-\zeta^{72}$ gleich 83^3 ist. Wie Herr *Kronecker* mir brieflich mitgetheilt hat, ist auch Herr *Wolfskehl* zu demselben Resultate gelangt. Die nicht unerhebliche Rechnung, welche die Bestimmung einer solchen Norm erfordert, veranlasste mich zu der Untersuchung, ob nicht ein einfacheres Verfahren gefunden werden könne. Ich erlaube mir, die von mir erzielten Resultate bei dieser Gelegenheit anzugeben.

Sei gegeben die Gleichung:

$$(30.)\qquad y^m - y^{m-1} + z^{m-1} = 0.$$

Wir setzen $y = x^{\frac{1}{\lambda}}$, wo λ eine Primzahl sein möge. Dann wird das Product:

$$(x^{\frac{m}{\lambda}} - x^{\frac{m-1}{\lambda}} + z^{m-1})(\alpha^m . x^{\frac{m}{\lambda}} - \alpha^{m-1} . x^{\frac{m-1}{\lambda}} + z^{m-1}) \ldots$$
$$\ldots (\alpha^{km} . x^{\frac{m}{\lambda}} - \alpha^{k(m-1)} . x^{\frac{m-1}{\lambda}} + z^{m-1}) \cdots\cdots = P(x, z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda-1)$$

eine ganze ganzzahlige Function von z^{m-1} und x, wenn

$$\alpha^\lambda = 1.$$

Verschwindet ein Factor von $P(x, z)$, so ist die Gleichung erfüllt:

$$\alpha^{mk} . x^{\frac{m}{\lambda}} - \alpha^{(m-1)k} . x^{\frac{m-1}{\lambda}} + z^{m-1} = 0,$$

also wenn

$$\alpha^k . x^{\frac{1}{\lambda}} = y$$

gesetzt wird, Gleichung (30). *Mithin ist $P(x, z)$ nichts anderes als die linke Seite derjenigen Gleichung, welche die λten Potenzen der Gleichung* (1.) *zu Wurzeln hat.* Setzen wir nun $x^{\frac{1}{\lambda}} = z$, so mag $P(x, z)$ in $Q(z)$ übergehen, und es wird:

$$Q = \prod_{0}^{\lambda-1}{}_k (\alpha^{mk} . z^m - \alpha^{(m-1)k} . z^{m-1} + z^{m-1})$$
$$= z^{m+(m-1)(\lambda-1)} . \prod_{1}^{\lambda-1}{}_k (z - \alpha^{-k} + \alpha^{-mk}).$$

Daher folgt die *Regel:*

Man bilde die Gleichung mten Grades, deren Wurzeln die λten Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$y^m - y^{m-1} + z^{m-1} = 0$$

sind, ersetze die Unbekannte durch z^λ, dividire durch $z^{m\lambda-\lambda+1}$, und die Function $(\lambda-1)$*ten Grades in z, welche übrig bleibt, ist:*

$$N(z - \alpha + \alpha^m); \quad \alpha^\lambda = 1.$$

Die Bildung dieser Gleichung gelingt nun aber durch Reihenentwickelung in manchen Fällen sehr leicht.

Zunächst ergiebt sich für *jedes* ganzzahlige λ:

$$y^\lambda = 1-\lambda z^{m-1}+\lambda\frac{\lambda-2m+1}{2}z^{2(m-1)}-\lambda\frac{(\lambda-3m+2)(\lambda-3m+1)}{2.3}z^{3(m-1)}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^\nu.\lambda\frac{(\lambda-1-\nu(m-1))(\lambda-2-\nu(m-1))\dots(\lambda+1-m\nu)}{2.3\dots\nu}z^{\nu(m-1)}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

In dieser Reihe findet sich eine Lücke. Denn von $\nu = E\frac{\lambda}{m}$ bis $\nu = E\frac{\lambda}{m-1}$ fehlen die betreffenden Glieder, welche alle *verschwinden*. Die obige Reihe ist gültig für z, welche ihrem absoluten Betrage nach in der Nähe von Null liegen.

Die übrigen $m-1$ Wurzeln y liegen alle bei Null, wenn z klein ist. Daher beginnt die Entwickelung einer jeden solchen Wurzel mit einem Term $a_0.z^\lambda$. Bilden wir nun die *symmetrische* Function

$$y^\lambda+y_1^\lambda+\cdots+y_{m-1}^\lambda = F(\lambda,\ z),$$

so ist dieselbe ganz und ganzzahlig in z, kann aber nicht vom Grade λ, sondern muss niedriger sein. Denn z^λ ist in Bezug auf die y, da z^{m-1} ihrem Producte gleicht, von der Dimension $\lambda.\frac{m}{m-1} > \lambda$, was also unmöglich in einer Function λter Dimension wie $F(\lambda, z)$ vorkommen kann.

Somit ist der der vorhin erwähnten Lücke vorangehende Theil der obigen Reihe genau $F(\lambda, z)$. Wir haben also:

$$(31.)\quad \begin{cases}\Sigma y^\lambda = F(\lambda,z) = 1-\lambda z^{m-1}+\cdots+(-1)^\nu.\frac{(\lambda-1-\nu m+\nu)\dots(\lambda+1-\nu m)}{2\dots\nu}.z^{\nu(m-1)}\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Die Reihe ist bei $\nu = E\frac{\lambda}{m}$ abzubrechen.

Dies gilt für jedes ganzzahlige λ. Um nun aus den so erhaltenen Potenzsummen die fundamentalen symmetrischen Functionen abzuleiten, muss man die Reihe (31.) in umgekehrter Folge, also mit dem höchsten Term beginnend, aufschreiben. Denn für die niedrigsten Terme ist einfach $F(2\lambda, z) = F^2(\lambda, z)$ u. s. w. Man hat dann wieder auf die Dimension z. B. von $\Sigma y_h^\lambda y_k^\lambda$ zu achten und gewinnt so bei der Rechnung manche Vortheile. Ich gehe jedoch nicht näher auf die Sache ein. So fand ich für $m = 3$ und $\lambda = 41$:

$$N(z-\alpha+\alpha^3) = z^{40}+41(7z^{25}-364z^{23}+3978z^{21}-16796z^{19}+35530z^{17}$$
$$-43263z^{15}+32890z^{13}-16380z^{11}+5481z^9-1240z^7+187z^5-18z^3+z)$$
$$+41(z^{12}+91z^{10}+715z^8+1144z^6+476z^4+51z^2+1).$$

Für $z=-1$ wird $N=101107$, für $z=1$, $N=83.1231$.

Nach *Kronecker* würden für $\lambda=83$ hierdurch gewisse ψ näher charakterisirt sein *).

*) Die hiermit gestellte Aufgabe, die Norm einer trinomischen complexen Zahl anzugeben, habe ich später nach ganz anderen Principien behandelt. Vergl. meinen Aufsatz *Acta mathematica* Bd. 10, S. 57 ff. *„Ueber gewisse trinomische complexe Zahlen"*.

Coesfeld, im Juni 1885.

Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten.

(Von Herrn *L. Pochhammer* in Kiel.)

Die Reihe

$$y = 1+\frac{\alpha\beta\gamma}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots \quad \text{inf.},$$

welche der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe analog gebildet ist und der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$x^2(x-1)\frac{d^3y}{dx^3}+x\{(\alpha+\beta+\gamma+3)x-(\varrho+\sigma+1)\}\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+\{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha+\beta+\gamma+1)x-\varrho\sigma\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta\gamma y = 0$$

genügt, beziehungsweise die entsprechenden Reihen höherer Ordnung

$$y = 1+\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{1.\varrho\sigma\tau}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)}x^2+\cdots \quad \text{inf.},$$

. . . .

$$y = 1+\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}x+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_n(\alpha_n+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2+\cdots \quad \text{inf.}$$

sind der Gegenstand von Untersuchungen von *Clausen* *), sowie der Herren *Thomae* **) und *Goursat* ***) gewesen. Die Arbeiten von *Clausen* beschränken

---

*) Dieses Journal, Bd. 3, pag. 89 und pag. 92.

**) „Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesondere über die Reihe

$$1+\frac{a_0a_1a_2}{1.b_1b_2}x+\frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{1.2.b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)}x^2+\cdots\text{“},$$

Math. Ann., Bd. 2, 1870, und: „Ueber die Functionen, welche durch Reihen von der Form

$$1+\frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''}+\frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1}+\cdots$$

dargestellt werden“, dieses Journal, Bd. 87, 1879.

***) „Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur“, Ann. de l'École Normale, Sér. II, tome XII, pag. 261 et 395, 1883, und: Sur une classe d'intégrales doubles“, Acta Math., Bd. V, 1884.

sich auf die Behandlung der Frage, in welchem Falle die am Anfang genannte Reihe mit dem Quadrat einer *Gauss*schen Reihe, resp. mit dem Product zweier *Gauss*schen Reihen identisch ist. Herr *Thomae* stellt in der ersteren der zwei citirten Abhandlungen die lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung auf, welcher die allgemeine Reihe genügt, integrirt diese Gleichung durch Reihen und geht für $n=3$ auf den Zusammenhang der einzelnen Zweige der Function bei ihrer Fortsetzung in der x-Ebene, sowie auf die Relationen zwischen contiguen Functionen näher ein. Der Differentialgleichung $n$ter Ordnung kann man die Form

$$\left.\begin{array}{l} x^{n-1}(x-1)\dfrac{d^n y}{dx^n}+x^{n-2}(a_1x-b_1)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+x^{n-3}(a_2x-b_2)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ \quad +\cdots+x(a_{n-2}x-b_{n-2})\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a_{n-1}x-b_{n-1})\dfrac{dy}{dx}+a_n y \end{array}\right\} = 0$$

geben, woselbst $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_{n-1}$ Constante bedeuten. In der zweiten Abhandlung nimmt Herr *Thomae* eine Differenzengleichung zum Ausgangspunkt und leitet mittelst derselben eine Recursionsformel von erheblicher Allgemeinheit her; hieraus ergiebt sich gleichzeitig ein neuer Beweis für einige Resultate der ersteren Arbeit.

Von den zwei Abhandlungen des Herrn *Goursat* enthält die erstgenannte einerseits die Herleitung der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche die obige allgemeine Reihe zum particulären Integral hat, aus den geforderten Eigenschaften der Function y in den Bezirken der singulären Werthe

$$x=0, \quad x=1, \quad x=\infty,$$

andererseits Sätze über Functionen gleicher Verzweigung, mit deren Hülfe auch die von *Clausen* angeregte Frage behandelt wird. — Es ist bekannt, dass die *Gauss*sche hypergeometrische Reihe nach Hinzufügung eines constanten Factors als ein bestimmtes Integral, in welchem x als Parameter vorkommt, geschrieben werden kann. In analoger Weise ist, bis auf einen constanten Factor, die erwähnte, der Differentialgleichung dritter Ordnung genügende Reihe mit dem Doppelintegral

$$\int_0^1\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}v^{\beta-1}(1-v)^{\sigma-\beta-1}(1-xuv)^{-\gamma}\,du\,dv,$$

und die allgemeinere Reihe $n$ter Ordnung mit dem $(n-1)$-fachen Integral

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 u_1^{\alpha_1-1}(1-u_1)^{\varrho_1-\alpha_1-1}\cdots$$
$$u_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}(1-u_{n-1})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1}(1-xu_1\dots u_{n-1})^{-\alpha_n}du_1\dots du_{n-1}$$

identisch *). In der That entsteht, nach Anwendung des binomischen Satzes auf den die Grösse x enthaltenden Factor, aus dem $(n-1)$-fachen Integral eine Reihe, in welcher der Coefficient einer beliebigen Potenz von x in das Product von $n-1$ *Euler*schen Integralen erster Gattung zerfällt, woraus jene Identität folgt. Um die Eigenschaften der obigen hypergeometrischen Reihen höherer Ordnung zu ermitteln, kann man daher auch von den mehrfachen bestimmten Integralen ausgehen. In dieser Art wird das Doppelintegral, das sich von der Reihe dritter Ordnung nur durch einen constanten Factor unterscheidet, in der zweiten der genannten Abhandlungen des Herrn *Goursat* behandelt. Dieselbe enthält ausserdem eine Reihe von interessanten Sätzen, welche andere, durch bestimmte Integrale oder Doppelintegrale darstellbare Functionen betreffen. Herr *Goursat* beweist mittelst des *Cauchy*schen Fundamentalsatzes über Integrale längs geschlossener Curven, dass andere particuläre Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung aus jenem einen Doppelintegral erhalten werden, wenn man, während die zu integrirende Function dieselbe bleibt, für die Grenzen andere Werthe $\Big($es kommen daselbst $0, 1, \infty, \frac{1}{x}, \frac{1}{xu}, \frac{1}{xv}$ als solche vor$\Big)$ einsetzt. Der entsprechende Satz über die Differentialgleichung zweiter Ordnung drückt bekanntlich eine wichtige Eigenschaft der *Gauss*schen Reihe aus.

Die Untersuchungen, welche in nachstehender Arbeit angestellt werden, beziehen sich auf die Lösung der erwähnten linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung durch $(n-1)$-fache bestimmte Integrale. Im Einklang mit dem Resultat, welches Herr *Goursat* für die dritte Ordnung erhielt, ergiebt sich, dass alle particulären Lösungen der Differentialgleichung $n$ter Ordnung sich durch bestimmte Integrale darstellen lassen, bei denen die zu integrirende Function stets dieselbe ist, während die Grenzen verschiedene Werthe annehmen. Indessen weicht sowohl die Form der bestimmten Integrale von der obenerwähnten, in der *Goursat*schen Abhandlung benutzten ab, als auch ist die Untersuchungsmethode eine wesentlich verschiedene. Daher wird

---

*) *Thomae*, Math. Ann., l. c., pag. 429, und *Goursat*, Ann. de l'École Norm., l. c., pag. 281.

die Differentialgleichung dritter Ordnung hier ebenfalls von Neuem behandelt. Die im Folgenden abgeleitete Form der bestimmten Integrale führt zu einer übersichtlichen Anordnung und Classification der verschiedenen particulären Lösungen der Differentialgleichung und gestattet die Ausdehnung der Theorie auf eine beliebige Ordnung in verhältnissmässig einfacher Weise. — Die Eigenschaft jener bestimmten Integrale, Lösungen der betreffenden Differentialgleichung zu sein, wird hier nach einer Methode bewiesen, welche nicht die vorherige Entwickelung der Integrale in Reihen bedingt. Es wird gezeigt, dass die Differentialgleichungen der genannten Art durch particuläre Integrale von der Form

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\mathfrak{T}\,dt$$

befriedigt werden, woselbst $\mathfrak{T}$ eine Function von t allein, h entweder constant oder gleich x, und g, α constant sind. Hat die betrachtete Differentialgleichung die Ordnung n, so genügt die Function $\mathfrak{T}$ einer linearen Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung, in welcher t die unabhängige Variable ist. Nach Anwendung einer einfachen Substitution wiederholt sich dieser Schluss für die Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung, respective für die entsprechenden Gleichungen niedrigerer Ordnung. So gelangt man zuletzt zur hypergeometrischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die einfachen bestimmten Integrale genügen, und erhält folglich $(n-1)$-fache bestimmte Integrale als Lösungen der Differentialgleichung $n$ter Ordnung. — Dieselbe Methode ist auch auf gewisse andere Gruppen linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung anwendbar, worauf zurückzukommen der Verfasser sich vorbehält.

Nachdem im § 1 der nachstehenden Arbeit die Rechnungen für die Differentialgleichung zweiter Ordnung kurz recapitulirt sind, wird im § 2 die Differentialgleichung dritter Ordnung integrirt. Im § 3 werden zwei Hülfsformeln abgeleitet, im § 4 die Hauptintegrale der Gleichung dritter Ordnung durch Substitutionen umgeformt und in Potenzreihen entwickelt. Die §§ 5 und 7 enthalten die analogen Rechnungen für die Differentialgleichung vierter Ordnung, während im § 6 ein m-faches Integral auf das Product von m *Euler*schen Integralen erster Gattung zurückgeführt wird. Im § 8 werden einige im Folgenden angewendete Sätze über gewisse ganzzahlige Coefficienten, die in der Theorie der analytischen Facultäten vorkommen, hergeleitet. Die Ausdehnung des Integrationsverfahrens auf die Differential-

gleichung $n$ter Ordnung ist der Gegenstand der §§ 9—12, und zwar handeln die §§ 9 und 10 von der Zurückführung der Gleichung $n$ter Ordnung auf eine ähnlich gebildete Gleichung $(n-1)$ter Ordnung, der § 11 von den Grenzen, welche bei den bestimmten Integralen anzuwenden sind, während im § 12 die Form der particulären Integrale, insbesondere der Hauptintegrale für die Gebiete von $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, erörtert wird. Endlich werden im § 13 die Substitutionen angegeben, durch welche man die erhaltenen Integrale transformirt, um sie demnächst in Potenzreihen zu entwickeln.

Die oben genannten hypergeometrischen Reihen $n$ter Ordnung sind nicht die einzigen, welche aus einer Verallgemeinerung der *Gauss*schen Reihe entstehen. Der Verfasser hat in einer früheren Abhandlung *) eine andere Art hypergeometrischer Reihen angegeben, die ebenfalls einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung genügen und sich für $n = 2$ auf die *Gauss*sche Reihe reduciren. Dieselben sind durch einfache bestimmte Integrale ausdrückbar, und ihre Differentialgleichung hat n singuläre Punkte, abgesehen vom singulären Werthe $x = \infty$. Es dürfte kein Hinderniss bestehen, den Namen „hypergeometrische Reihen (resp. Functionen) $n$ter Ordnung“ für beide Fälle beizubehalten; nur müssen die erforderlichen weiteren Angaben hinzutreten. Da die im Folgenden behandelten Functionen ausser $x = \infty$ nur die zwei singulären Punkte $x = 0$ und $x = 1$ haben, so können sie, zur Unterscheidung von jenen anderen Reihen, als „hypergeometrische Reihen $n$ter Ordnung mit zwei endlichen singulären Punkten“ bezeichnet werden. Beiden Arten von Functionen ist die Eigenschaft gemeinsam, keine logarithmischen Bestandtheile zu enthalten, obwohl die Anfangsexponenten der einzelnen particulären Integrale sich zum Theil nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden; die bei ihnen vorkommenden Unstetigkeiten und Mehrdeutigkeiten sind ausschliesslich die von Potenzen.

Es möge hier noch erwähnt sein, dass in den nachstehenden Rechnungen der $m$te Binomialcoefficient der Zahl q wie üblich durch $(q)_m$, und der Zähler desselben durch $[q]_m$ bezeichnet wird, sodass

$$(q)_m = \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-m+1)}{1.2.3\dots m}, \quad (q)_0 = 1,$$

$$[q]_m = q(q-1)(q-2)\dots(q-m+1), \quad [q]_0 = 1$$

ist. Aus der letzteren Benennung ist sodann durch Hinzufügung eines

*) Dieses Journal Bd. 71, „über hypergeometrische Functionen $n$ter Ordnung.“

Zeichens + als oberen Index eine neue gebildet, indem

$$[q]_m^+ = q(q+1)(q+2)\dots(q+m-1), \quad [q]_0^+ = 1$$

gesetzt wird. Hiernach kann man die am Eingang angeführte hypergeometrische Reihe *n*ter Ordnung kurz als die Summe

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{[\alpha_1]_m^+ [\alpha_2]_m^+ \dots [\alpha_n]_m^+}{[1]_m^+ [\varrho_1]_m^+ \dots [\varrho_{n-1}]_m^+} x^m$$

schreiben.

§ 1.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+\beta+1)x-\varrho]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0,$$

welcher die *Gauss*sche hypergeometrische Reihe

$$(2.) \qquad F(\alpha, \beta, \varrho, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\varrho}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)}x^2 + \cdots \text{ inf.}$$

genügt, kann auf die Form

$$(3.) \quad f_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[(\beta+1)\frac{df_2(x)}{dx} - f_1(x)\right]\frac{dy}{dx} + \left[\frac{(\beta+1)\beta}{2}\frac{d^2f_2(x)}{dx^2} - \beta\frac{df_1(x)}{dx}\right]y = 0$$

gebracht werden, wenn man durch $f_2(x)$, $f_1(x)$ die ganzen Functionen zweiten, resp. ersten Grades

$$f_2(x) = x(x-1), \quad f_1(x) = (\beta-\alpha+1)x - (\beta-\varrho+1)$$

bezeichnet. Für y werde das bestimmte Integral

$$(4.) \qquad y = \int_{g_1}^{h_1} (u-x)^{-\beta}\,\mathfrak{U}\,du$$

eingesetzt, woselbst $\mathfrak{U}$ nur von u abhängt, und g_1, h_1 constant sind. Dann erhält man aus (3.) die Gleichung:

$$\beta(\beta+1)\int_{g_1}^{h_1}(u-x)^{-\beta-2}\,\mathfrak{U}\left\{f_2(x) + \frac{df_2(x)}{dx}(u-x) + \frac{d^2f_2(x)}{dx^2}\frac{(u-x)^2}{2}\right\}du$$

$$-\beta\int_{g_1}^{h_1}(u-x)^{-\beta-1}\,\mathfrak{U}\left\{f_1(x) + \frac{df_1(x)}{dx}(u-x)\right\}du = 0.$$

Aber nach dem *Taylor*schen Satze ist

$$f_2(u) = f_2(x) + \frac{df_2(x)}{dx}(u-x) + \frac{d^2f_2(x)}{dx^2}\frac{(u-x)^2}{2},$$

$$f_1(u) = f_1(x) + \frac{df_1(x)}{dx}(u-x),$$

sodass nach Division durch β die Gleichung

$$(\beta+1)\int_{g_1}^{h_1}(u-x)^{-\beta-2}f_2(u)\mathfrak{U}\,du-\int_{g_1}^{h_1}(u-x)^{-\beta-1}f_1(u)\mathfrak{U}\,du = 0$$

entsteht. Der erste Summandus der linken Seite wird durch theilweise Integration in den Ausdruck

$$-[(u-x)^{-\beta-1}f_2(u)\mathfrak{U}]_{u=g_1}^{u=h_1}+\int_{g_1}^{h_1}(u-x)^{-\beta-1}\frac{d(f_2(u)\mathfrak{U})}{du}du$$

transformirt. Indem man also die Grösse $\mathfrak{U}$ durch die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d(f_2(u)\mathfrak{U})}{du}-f_1(u)\mathfrak{U} = 0$$

als Function von u bestimmt und die Constanten g_1, h_1 so wählt, dass das Product

$$M_1 = (u-x)^{-\beta-1}f_2(u)\mathfrak{U}$$

für $u=g_1$ und $u=h_1$ verschwindet, wird das bestimmte Integral (4.) zu einer particulären Lösung der Differentialgleichung (1.). Die Substitution

$$\mathfrak{U} = u^{\beta-\varrho}U$$

liefert für U die Gleichung

$$(u-1)\frac{dU}{du}-(\varrho-\alpha-1)U = 0,$$

woraus, wenn von dem willkürlichen constanten Factor abgesehen wird,

$$\begin{cases} U = (u-1)^{\varrho-\alpha-1}, \quad \mathfrak{U} = u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}, \\ M_1 = (u-x)^{-\beta-1}u^{\beta-\varrho+1}(u-1)^{\varrho-\alpha} \end{cases}$$

folgt.

Für die Grenzen g_1, h_1 ergeben sich die Werthe 0, 1, ∞. Allerdings haben bei jedem dieser Werthe, damit er anwendbar sei, die Constanten α, β, ϱ gewissen Ungleichheiten zu genügen. Denn damit M_1 für $u=0$, bezw. für $u=1$ und $u=\infty$ verschwinde, müssen die respectiven Bedingungen

$$\beta-\varrho+1>0, \quad \varrho-\alpha>0, \quad \alpha>0$$

erfüllt sein. Diese Beschränkungen übertragen sich bekanntlich nicht auf die Potenzreihen, in welche die bestimmten Integrale sich entwickeln lassen.

Es kann ferner eine der Grenzen des Integrals (4.) gleich x genommen werden. Für $h_1=x$ ergiebt sich aus (4.) die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \beta\int_{g_1}^{x}(u-x)^{-\beta-1}\mathfrak{U}\,du+[(u-x)^{-\beta}\mathfrak{U}]_{u=x},$$

auf deren rechter Seite der zweite Summandus verschwindet, falls β (im reellen Theil) negativ ist; analog erhält man für $\beta+1<0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \beta(\beta+1)\int_{g_1}^{x}(u-x)^{-\beta-2}\mathfrak{U}\,du,$$

sodass die obige Rechnung für $h_1 = x$ gültig bleibt. Gleichzeitig ist auch $M_1 = 0$ für $u = x$. — Indem man für g_1, h_1 in verschiedener Weise je zwei der vier Werthe 0, 1, ∞, x einsetzt, findet man sechs particuläre Lösungen der Differentialgleichung (1.), welche sich in drei Gruppen ordnen. Zu jedem der drei singulären Werthe $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ gehören zwei Integrale, welche in seinem Bezirke entweder eindeutig sind oder nach Division mit einer Potenz eindeutig werden, die s. g. Hauptintegrale oder Hauptlösungen. Man hat nun, um die Hauptintegrale für die Umgebung irgend eines dieser singulären Punkte zu erhalten, für g_1 und h_1 stets einerseits den betreffenden Punkt und den Werth x, andererseits die zwei übrigen singulären Punkte zu wählen. So ergiebt sich für das Gebiet des Punktes $x = 0$ das eindeutige Hauptintegral

$$\int_1^{\infty}(u-x)^{-\beta}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du,$$

welches durch die Substitution $u = \frac{1}{\mathfrak{u}}$ in

$$\int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\varrho-\alpha-1}(1-x\mathfrak{u})^{-\beta}d\mathfrak{u}$$

übergeht. Dasselbe ist, wie die Anwendung des binomischen Satzes auf $(1-x\mathfrak{u})^{-\beta}$ zeigt, mit dem Ausdruck

$$E(\alpha,\ \varrho-\alpha)F(\alpha,\ \beta,\ \varrho,\ x)$$

identisch, wo durch $E(\alpha, \varrho-\alpha)$ das *Euler*sche Integral erster Art

$$E(\alpha,\ \varrho-\alpha) = \int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\varrho-\alpha-1}d\mathfrak{u} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\varrho-\alpha)}{\Gamma(\varrho)}$$

bezeichnet wird. Die andere Hauptlösung für die Umgebung des Punktes $x = 0$

$$\int_0^{x}(u-x)^{-\beta}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du$$

verwandelt sich durch die Substitution $u = x\mathfrak{u}$ in den Ausdruck:

$$(-1)^{\varrho-\alpha-\beta-1}x^{1-\varrho}\int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{-\beta}(1-x\mathfrak{u})^{\varrho-\alpha-1}d\mathfrak{u}$$

$$= \text{Const.}\,x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1,\ 2-\varrho,\ x).$$

In ähnlicher Weise erhält man für die Umgebung des Punktes $x=1$ die Hauptintegrale

$$\begin{cases} \int_0^x \Phi(u,\ x)du = \text{Const.}\ F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\varrho+1,\ 1-x), \\ \int_1^x \Phi(u,\ x)du = \text{Const.}\ (x-1)^{\varrho-\alpha-\beta} F(\varrho-\alpha,\ \varrho-\beta,\ \varrho-\alpha-\beta+1,\ 1-x) \end{cases}$$

und für den Bezirk der grossen Werthe von x die Hauptintegrale

$$\begin{cases} \int_0^1 \Phi(u,\ x)du = \text{Const.}\ x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\varrho+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right), \\ \int_\infty^x \Phi(u,\ x)du = \text{Const.}\ x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\varrho+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi(u,\ x) = (u-x)^{-\beta} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

gesetzt ist.

§ 2.

Man betrachte nun die analog zu (3.) gebildete Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} & f_3(x)\frac{d^3y}{dx^3} + [(\gamma+2)_1 f_3'(x) - f_2(x)]\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + [(\gamma+2)_2 f_3''(x) - (\gamma+1)_1 f_2'(x) + f_1(x)]\frac{dy}{dx} \\ & + [(\gamma+2)_3 f_3'''(x) - (\gamma+1)_2 f_2''(x) + (\gamma)_1 f_1'(x)]\,y \end{aligned}\right\} = 0,$$

in welcher γ eine Constante, $f_k(x)$ für $k=1,\ 2,\ 3$ eine ganze Function von x des $k$ten oder eines niedrigeren Grades, $f_k'(x)$, $f_k''(x)$ etc. ihre successiven Differentialquotienten, und $(\gamma+2)_1$, $(\gamma+2)_2$ etc. Binomialcoefficienten bedeuten. Man substituirt, indem man durch $\mathfrak{V}$ eine Function von v allein bezeichnet, für y das bestimmte Integral:

$$(6.)\quad y = \int_{g_2}^{h_2} (v-x)^{-\gamma}\mathfrak{V}\,dv.$$

Die Grenze g_2 desselben sei constant, die Grenze h_2 entweder constant oder gleich x; im letzteren Falle setzt man den Werth $\gamma+2$ als negativ (im reellen Theil) voraus. Dann ergiebt sich aus (5.) die Gleichung:

$$\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-3}\mathfrak{B}\Big\{f_3(x)+f_3'(x)(v-x)+f_3''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2}$$
$$+f_3'''(x)\frac{(v-x)^3}{1.2.3}\Big\}dv$$
$$-\gamma(\gamma+1)\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-2}\mathfrak{B}\Big\{f_2(x)+f_2'(x)(v-x)+f_2''(x)\frac{(v-x)^2}{1.2}\Big\}dv$$
$$+\gamma\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-1}\mathfrak{B}\{f_1(x)+f_1'(x)(v-x)\}dv = 0$$

oder nach Anwendung des *Taylor*schen Satzes auf die Ausdrücke in den Klammern und nach Division durch γ:

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l}(\gamma+1)(\gamma+2)\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-3}f_3(v)\mathfrak{B}dv \\ -(\gamma+1)\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-2}f_2(v)\mathfrak{B}dv+\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-1}f_1(v)\mathfrak{B}dv\end{array}\right\} = 0.$$

In analoger Weise wie im § 1 werden der erste und der zweite Summandus (der erste zweimal) durch theilweise Integration transformirt. Dann kommt hinter dem Integralzeichen die Variable x ausschliesslich in der Potenz $(v-x)^{-\gamma-1}$ vor, und man erhält die Gleichung

$$\left.\begin{array}{c}[M_2]_{v=h_2}-[M_2]_{v=g_2} \\ +\int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma-1}\Big[\frac{d^2(f_3(v)\mathfrak{B})}{dv^2}-\frac{d(f_2(v)\mathfrak{B})}{dv}+f_1(v)\mathfrak{B}\Big]dv\end{array}\right\} = 0,$$

in welcher zur Abkürzung durch M_2 der Ausdruck

$$(8.)\quad M_2 = -(\gamma+1)(v-x)^{-\gamma-2}f_3(v)\mathfrak{B}+(v-x)^{-\gamma-1}\Big[f_2(v)\mathfrak{B}-\frac{d(f_3(v)\mathfrak{B})}{dv}\Big]$$

bezeichnet wird. Die Grösse $\mathfrak{B}$ werde durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(9.)\quad \frac{d^2(f_3(v)\mathfrak{B})}{dv^2}-\frac{d(f_2(v)\mathfrak{B})}{dv}+f_1(v)\mathfrak{B} = 0$$

als Function von v bestimmt. Ist man im Stande, diese Gleichung zu integriren und g_2, h_2 so zu wählen, dass die in (8.) definirte Grösse M_2 für $v = g_2$ und $v = h_2$ verschwindet, so genügt das Integral (6.) der Differentialgleichung (5.). Es soll nun auf den Fall eingegangen werden, wo die Differentialgleichung (9.) sich auf die Gleichung der *Gauss*schen hypergeometrischen Reihe zurückführen lässt; dann erhält man Lösungen von (5.) in Gestalt bestimmter Doppelintegrale.

Der Coefficient der zweiten Ableitung der Unbekannten ist in (9.)

eine Function dritten, in (1.) eine Function zweiten Grades der unabhängigen Variablen. Aber wenn auf die Gleichung (1.) die Substitution $y = x^k \eta$, $\eta = x^{-k} y$ angewendet wird, so findet man für η eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, in welcher der Factor der zweiten Ableitung von η den dritten Grad hat.

Man führt demgemäss, indem man durch σ eine Constante bezeichnet und für k den Werth $\sigma-\gamma$ nimmt, in (9.) an Stelle von $\mathfrak{V}$ eine neue Unbekannte V mittelst der Gleichung

$$(10.)\qquad \mathfrak{V} = v^{\gamma-\sigma} V$$

ein, wodurch für V die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} & v^{\gamma-\sigma} f_3(v) \frac{d^2 V}{dv^2} - \left[v^{\gamma-\sigma} f_2(v) - 2\frac{d(v^{\gamma-\sigma} f_3(v))}{dv}\right] \frac{dV}{dv} \\ & + \left[v^{\gamma-\sigma} f_1(v) - \frac{d(v^{\gamma-\sigma} f_2(v))}{dv} + \frac{d^2(v^{\gamma-\sigma} f_3(v))}{dv^2}\right] V \end{aligned}\right\} = 0$$

entsteht, und sucht dann die Functionen f_3, f_2, f_1 so zu bestimmen, dass diese Gleichung, abgesehen von einem Factor der linken Seite, die Gestalt der Gleichung (1.), also die Gestalt

$$v(v-1)\frac{d^2 V}{dv^2} + [(\alpha'+\beta'+1)v - \varrho']\frac{dV}{dv} + \alpha'\beta' V = 0$$

annimmt. Nachdem die letztere Gleichung mit $v^{\gamma-\sigma+1}$ multiplicirt worden ist, können in den zwei genannten Differentialgleichungen die Coefficienten von $\frac{d^2 V}{dv^2}$, $\frac{dV}{dv}$ und V einander gleichgesetzt werden. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung mögen statt der Constanten α', β', ϱ' drei andere Constanten α, β, ϱ angewendet werden, welche mit ersteren durch die Gleichungen

$$(11.)\qquad \alpha' = \alpha-\sigma+1,\quad \beta' = \beta-\sigma+1,\quad \varrho' = \varrho-\sigma+1$$

verbunden sind, sodass für V die Differentialgleichung

$$(12.)\qquad \left\{\begin{aligned} & v(v-1)\frac{d^2 V}{dv^2} + [(\alpha+\beta-2\sigma+3)v - (\varrho-\sigma+1)]\frac{dV}{dv} \\ & \qquad + (\alpha-\sigma+1)(\beta-\sigma+1) V = 0 \end{aligned}\right.$$

aufgestellt wird. Dann erhält man zur Bestimmung der Functionen f_3, f_2, f_1 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v^{\gamma-\sigma} f_3(v) &= v^{\gamma-\sigma+2}(v-1), \\ -v^{\gamma-\sigma} f_2(v) + 2\frac{d(v^{\gamma-\sigma} f_3(v))}{dv} &= (\alpha+\beta-2\sigma+3)v^{\gamma-\sigma+2} - (\varrho-\sigma+1)v^{\gamma-\sigma+1}, \\ v^{\gamma-\sigma} f_1(v) - \frac{d(v^{\gamma-\sigma} f_2(v))}{dv} + \frac{d^2(v^{\gamma-\sigma} f_3(v))}{dv^2} &= (\alpha-\sigma+1)(\beta-\sigma+1)v^{\gamma-\sigma+1}, \end{aligned}$$

welches für dieselben die Werthe

$$(13.)\quad \begin{cases} f_3(v) = v^2(v-1), \\ f_2(v) = (2\gamma-\alpha-\beta+3)v^2-(2\gamma-\varrho-\sigma+3)v, \\ f_1(v) = (\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)v-(\gamma-\varrho+1)(\gamma-\sigma+1) \end{cases}$$

liefert. Bezeichnet man zur Abkürzung durch α_1, β_1, ϱ_1, σ_1 die Constanten

$$\alpha_1 = \gamma-\alpha+1, \quad \beta_1 = \gamma-\beta+1, \quad \varrho_1 = \gamma-\varrho+1, \quad \sigma_1 = \gamma-\sigma+1$$

und nimmt gleichzeitig den Werth x als Argument der Functionen f_3, f_2, f_1, so lauten die Gleichungen (13.):

$$\begin{cases} f_3(x) = x^2(x-1), \\ f_2(x) = (\alpha_1+\beta_1+1)x^2-(\varrho_1+\sigma_1+1)x, \\ f_1(x) = \alpha_1\beta_1 x-\varrho_1\sigma_1. \end{cases}$$

Die zu integrirende Differentialgleichung (5.) geht durch Substitution dieser Ausdrücke $f_3(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)$ in die folgende über

$$(14.)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^2(x-1)\dfrac{d^3y}{dx^3}+x[(\alpha+\beta+\gamma+3)x-(\varrho+\sigma+1)]\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ +[(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha+\beta+\gamma+1)x-\varrho\sigma]\dfrac{dy}{dx}+\alpha\beta\gamma y \end{array} \right\} = 0,$$

welche auch in Bezug auf die Form der Constanten genau mit der von *Clausen* und von Herrn *Goursat* behandelten Differentialgleichung dritter Ordnung übereinstimmt.

Die Gleichung (12.) zeigt, dass man den Werth von V aus den Formeln des § 1 erhält, wenn man daselbst x durch v, sowie α, β, ϱ durch $\alpha-\sigma+1$, $\beta-\sigma+1$, $\varrho-\sigma+1$ ersetzt. Die verschiedenen particulären Lösungen von (12.) lassen sich mithin in die Gleichung

$$(15.)\quad V = \int_{g_1}^{h_1}(u-v)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du$$

zusammenfassen, in welcher g_1, h_1 irgend zwei der Werthe 0, 1, ∞, v bedeuten. Aus (10.) ergeben sich dann die correspondirenden sechs Ausdrücke für $\mathfrak{V}$.

Hiermit ist bewiesen, dass das bestimmte Doppelintegral

$$(16.)\quad y = \int_{g_2}^{h_2}(v-x)^{-\gamma}v^{\gamma-\sigma}dv\int_{g_1}^{h_1}(u-v)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du$$

der Differentialgleichung (14.) genügt, falls g_2, h_2 so gewählt werden, dass die in (8.) angegebene Grösse M_2 für $v = g_2$ und $v = h_2$ verschwindet, wäh-

rend g_1, h_1 zwei der Werthe 0, 1, ∞, v sind. Zur Abkürzung möge durch $\Phi(u, v, x)$ die Function

$$(17.)\qquad \Phi(u, v, x) = (v-x)^{-\gamma} v^{\gamma-\sigma}(u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

bezeichnet werden, wodurch die Gleichung (16.) die Gestalt

$$y = \int_{g_2}^{h_2} dv \int_{g_1}^{h_1} \Phi(u, v, x) du$$

annimmt.

Der Ausdruck M_2 lautet nach Berücksichtigung von (10.):

$$M_2 = -(v-x)^{-\gamma-2} v^{\gamma-\sigma+2}(v-1)\left\{(\gamma+1)V+(v-x)\frac{dV}{dv}\right\}$$
$$+(v-x)^{-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma+1} V\{(\gamma+\sigma-\alpha-\beta)v-(\gamma-\varrho+1)\}.$$

Derselbe hat, wenn $\gamma+2$ im reellen Theil negativ ist, für $v=x$ den Werth Null, während für V eine beliebige der erwähnten sechs Functionen gesetzt werden darf. Das vollständige Integral der Differentialgleichung (12.) hat, wie aus § 1 folgt, in der Umgebung des Punktes $v=0$ die Form

$$V = c_1 F(\alpha-\sigma+1, \beta-\sigma+1, \varrho-\sigma+1, v)+c_2 v^{\sigma-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1, \sigma-\varrho+1, v)$$

und für grosse v die Form

$$V = c_1' v^{\sigma-\alpha-1} F\left(\alpha-\varrho+1,\ \alpha-\sigma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{v}\right)$$
$$+c_2' v^{\sigma-\beta-1} F\left(\beta-\varrho+1,\ \beta-\sigma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{v}\right),$$

wo c_1, c_2, c_1', c_2' willkürliche Constante sind. Werden diese Werthe von V in M_2 eingesetzt, so erkennt man leicht, dass $M_2=0$ für $v=0$ ist, falls die Constanten $\gamma-\varrho+1$ und $\gamma-\sigma+1$ positiv sind, und dass M_2 für $v=\infty$ verschwindet, falls α und β positiv sind. Man nehme an, dass die Ungleichheiten

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma+2<0,\quad \gamma-\varrho+1>0,\quad \gamma-\sigma+1>0,$$

welche, wenn die angeführten Constanten complex sind, für die reellen Bestandtheile derselben gelten sollen, gleichzeitig erfüllt seien. Dann ist der Ausdruck

$$y = \int_{g_2}^{h_2} (v-x)^{-\gamma} v^{\gamma-\sigma} V dv$$

eine Lösung der Differentialgleichung (14.), sobald für g_2, h_2 zwei der Werthe 0, ∞, x gesetzt werden, welches der sechs particulären Integrale von (12.) man auch für V substituiren möge. Hierdurch erhält man achtzehn particuläre Lösungen der Gleichung (14.).

Für g_2 oder h_2 kann ausserdem der Werth 1 gewählt werden. Jedoch verhält sich (bei dem Integral in Bezug auf die Variable v) diese Grenze 1 wesentlich anders als die vorerwähnten Grenzen 0, ∞, x. Für die Umgebung des Punktes $v = 1$ lautet nach § 1 das vollständige Integral von (12.)

$$V = c_1'' F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1,\ \alpha+\beta-\varrho-\sigma+2,\ 1-v)$$
$$+c_2''(v-1)^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1} F(\varrho-\alpha,\ \varrho-\beta,\ \varrho+\sigma-\alpha-\beta,\ 1-v).$$

Substituirt man nun für V zunächst das particuläre Integral

$$V = F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1,\ \alpha+\beta-\varrho-\sigma+2,\ 1-v)$$
$$= \text{Const.}\int_0^\infty (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du,$$

welches für $v = 1$ selbst gleich Eins ist, so nimmt der correspondirende Ausdruck von M_2 für $v = 1$ nicht den Werth 0, sondern den Werth

$$(\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1)(1-x)^{-\gamma-1}$$

an. Hieraus folgt, dass das Doppelintegral

$$\int_1^{h_2} dv \int_0^\infty \Phi(u,\ v,\ x)\,du,$$

in welchem h_2 einen beliebigen der Werthe 0, ∞, x bezeichnet, keine particuläre Lösung der Differentialgleichung (14.) ist, dass dasselbe vielmehr der nicht homogenen Differentialgleichung genügt, welche aus (14.) entsteht, wenn man statt der Null eine Function Const. $(1-x)^{-\gamma-1}$ als rechte Seite einführt.

Wird dagegen für V das andere zu $v = 1$ gehörige Hauptintegral von (12.)

$$(v-1)^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1} F(\varrho-\alpha,\ \varrho-\beta,\ \varrho+\sigma-\alpha-\beta,\ 1-v)$$
$$= \text{Const.}\int_1^v (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\,du$$

gesetzt, und ist $\varrho+\sigma-\alpha-\beta$ im reellen Theil positiv, so verschwindet M_2 für $v = 1$. Also stellt, unter der Voraussetzung $\varrho+\sigma-\alpha-\beta > 0$, das Doppelintegral

$$y = \int_1^{h_2} dv \int_1^v \Phi(u,\ v,\ x)\,du,$$

in welchem h_2 wieder einen der Werthe 0, ∞, x bedeutet, eine Lösung von (14.) dar. Hiermit sind drei weitere particuläre Integrale von (14.)

ermittelt *). Aus den letzteren Betrachtungen folgt, dass, wenn in dem Doppelintegral (16.) die Grenze g_2 oder h_2 gleich 1 gewählt wird, für g_1 und h_1 die Werthe 1 und v gesetzt werden müssen.

§ 3.

Man nehme an, dass von den Constanten

$$\varrho,\quad \sigma,\quad \varrho-\sigma,\quad \alpha-\beta,\quad \alpha-\gamma,\quad \beta-\gamma,\quad \varrho+\sigma-\alpha-\beta-\gamma$$

keine gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei. In Folge dieser Voraussetzung bleibt das vollständige Integral der Differentialgleichung (14.) frei von logarithmischen Bestandtheilen. Es existiren dann in jedem der Gebiete der drei singulären Werthe $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ Hauptintegrale, welche daselbst entweder eindeutig oder gleich dem Product aus einer eindeutigen Function und einer Potenz von x, resp. von $x-1$ sind. Diese Hauptintegrale oder Hauptlösungen werden aus dem Doppelintegral (16.) für gewisse Werthe der Grenzen g_1, h_1, g_2, h_2 erhalten.

Um den Zusammenhang der Rechnung nicht zu unterbrechen, sollen, bevor zur Betrachtung der Hauptintegrale übergegangen wird, zwei einfache Hülfsformeln abgeleitet werden.

Man bezeichnet durch $E(k, l)$ das *Euler*sche Integral erster Gattung:

$$E(k,\ l) = E(l,\ k) = \int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{l-1}\,du = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}.$$

Da das erste der im § 1 erhaltenen sechs bestimmten Integrale sich für $x = 1$ auf einen solchen Ausdruck reducirt, so folgt aus der dort erwähnten Identität die bekannte Formel:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \varrho,\ 1) = \frac{\Gamma(\varrho)\Gamma(\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\varrho-\alpha)\Gamma(\varrho-\beta)}.$$

Es werde nun in dem Doppelintegral

$$N = \int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}\,dv \int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}\,du,$$

---

*) Diese Resultate entsprechen den von Herrn *Goursat* auf anderem Wege abgeleiteten (Acta Math. II). Auch der Satz des Herrn *Goursat*, wonach zunächst, falls jene hier auszuschliessenden Doppelintegrale mitberücksichtigt werden, eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung erhalten wird (l. c. pag. 55), ist mit den obigen Rechnungen im Einklang. Denn die soeben erwähnte, nicht homogene Differentialgleichung dritter Ordnung kann durch Differentiation auf eine homogene Gleichung vierter Ordnung zurückgeführt werden, welcher auch die durch (14.) definirte Function y genügt.

in welchem k_1, k_2, l_1, l_2 Constante bedeuten, die Potenz $(1-uv)^{l_2}$ nach dem binomischen Satze entwickelt. Dann ergiebt sich für N eine Reihe, in welcher jeder Summandus zwei *Euler*sche Integrale erster Art zu Factoren hat:

$$N = E(k_1+k_2,\ l_1)E(k_2,\ k_1)-\frac{l_2}{1}E(k_1+k_2+1,\ l_1)E(k_2+1,\ k_1)+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^\nu\frac{l_2(l_2-1)\dots(l_2-\nu+1)}{1.2\dots\nu}E(k_1+k_2+\nu,\ l_1)E(k_2+\nu,\ k_1)+\cdots.$$

Durch Anwendung der Reductionsformel

$$(18.)\qquad E(p+\nu,\ q) = \frac{p(p+1)\dots(p+\nu-1)}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+\nu-1)}E(p,\ q)$$

entsteht hieraus, nachdem gewisse Factoren sich fortgehoben haben, die Gleichung:

$$N = E(k_1+k_2,\ l_1)E(k_1,\ k_2)\left\{1-\frac{l_2k_2}{1.(k_1+k_2+l_1)}+\frac{l_2(l_2-1)k_2(k_2+1)}{1.2.(k_1+k_2+l_1)(k_1+k_2+l_1+1)}-\cdots\right\}$$
$$= E(k_1+k_2,\ l_1)E(k_1,\ k_2)F(-l_2,\ k_2,\ k_1+k_2+l_1,\ 1)$$
$$= E(k_1+k_2,\ l_1)E(k_1,\ k_2)\frac{\Gamma(k_1+k_2+l_1)\Gamma(k_1+l_1+l_2)}{\Gamma(k_1+l_1)\Gamma(k_1+k_2+l_1+l_2)}.$$

Indem man jetzt auch für $E(k_1+k_2, l_1)$ und $E(k_1, k_2)$ ihre Ausdrücke in Γ-Functionen einsetzt, erhält man die Gleichung:

$$(19.)\quad \begin{cases} \int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}dv\int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}du \\ = \dfrac{\Gamma(k_1)\Gamma(l_1)}{\Gamma(k_1+l_1)}\,\dfrac{\Gamma(k_2)\Gamma(k_1+l_1+l_2)}{\Gamma(k_1+k_2+l_1+l_2)} = E(k_1,\ l_1)E(k_2,\ k_1+l_1+l_2). \end{cases}$$

Die zweite Hülfsformel ergiebt sich aus der Betrachtung der Gleichung (7.) für den speciellen Fall, dass $x=1$ ist. Es werde

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma-\varrho+1>0,\quad \gamma-\sigma+1>0$$

angenommen; dann sind (nach § 2) in der Gleichung (7.) die Grenzen $g_2=0$, $h_2=\infty$ anwendbar, während in den Ausdruck $\mathfrak{V}$, $=v^{\gamma-\sigma}V$, für V ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (12.) eingesetzt werden darf. Ordnet man die in (13.) angegebenen Functionen $f_3(v)$, $f_2(v)$, $f_1(v)$ nach Potenzen von $v-1$

$$f_3(v) = v-1+2(v-1)^2+(v-1)^3,$$
$$f_2(v) = \varrho+\sigma-\alpha-\beta-(2\alpha+2\beta-2\gamma-\varrho-\sigma-3)(v-1)+(2\gamma-\alpha-\beta+3)(v-1)^2,$$
$$f_1(v) = \alpha\beta-\varrho\sigma-(\gamma+1)(\alpha+\beta-\varrho-\sigma)+(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)(v-1),$$

so entsteht aus (7.) für die bezeichneten Werthe von x, g_2, h_2 die Gleichung:

$$(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma-\varrho-\sigma+2)\int_0^\infty v^{\gamma-\sigma}(v-1)^{-\gamma-2}\,V\,dv$$
$$+[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)-\alpha\beta\gamma-\varrho\sigma]\int_0^\infty v^{\gamma-\sigma}(v-1)^{-\gamma-1}\,V\,dv$$
$$+\alpha\beta\int_0^\infty v^{\gamma-\sigma}(v-1)^{-\gamma}\,V\,dv = 0.$$

Als Integrationsweg der Variablen v werde die negative reelle Axe genommen.

Die Gleichung (12.) ändert sich nicht, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \sigma$ durch $\alpha+\nu$, $\beta+\nu$, $\gamma+\nu$, $\varrho+\nu$, $\sigma+\nu$ ersetzt werden. Denkt man sich also die soeben abgeleitete Relation zwischen den drei Integralen für die letzteren Constanten hingeschrieben, während ν irgend eine positive Constante ist, so bleibt V ein beliebiges particuläres Integral von (12.). Indem man ausserdem die Variable $\mathfrak{v}$ durch die Gleichung $v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}$ einführt, gewinnt man die Formel

$$(20.)\quad \left\{\begin{aligned} &(\gamma+\nu+1)(\alpha+\beta+\gamma+\nu-\varrho-\sigma+2)\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma+\nu}\,V\,d\mathfrak{v}\\ &-[(\alpha+\nu+1)(\beta+\nu+1)(\gamma+\nu+1)-(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\gamma+\nu)-(\varrho+\nu)(\sigma+\nu)]\\ &\times\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma+\nu-1}\,V\,d\mathfrak{v}+(\alpha+\nu)(\beta+\nu)\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma+\nu-2}\,V\,d\mathfrak{v} = 0,\end{aligned}\right.$$

in welcher die Substitution $v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}$ auch auf die Function V anzuwenden ist.

§ 4.

Um für die Differentialgleichung (14.) die Hauptlösungen in den Bezirken der singulären Punkte $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ zu erhalten, hat man bei der Wahl der auf die Variable v bezüglichen Grenzen g_2, h_2 des Doppelintegrals (16.) dieselbe Regel zu beobachten, welche im § 1 für die Grenzen der einfachen Integrale angegeben wurde. Die Grössen g_2, h_2 sind nämlich entweder gleich dem betrachteten singulären Punkte (in dessen Gebiet das Integral (16.) ein Hauptintegral sein soll) und der Variablen x, oder gleich den beiden übrigen singulären Punkten zu setzen. Für die Grenzen g_1, h_1 ist der am Schluss des § 2 angeführte Umstand zu be-

rücksichtigen, dass, sobald g_2 oder h_2 gleich Eins ist, g_1 und h_1 die Werthe 1 und v annehmen müssen. Hierdurch ergeben sich zunächst drei Hauptintegrale, bei denen die eine Grenze von v den Werth 1 hat; dies sind

$$(21.)\qquad \int_1^{\infty} (v-x)^{-\gamma}\, v^{\gamma-\sigma}\, dv \int_1^{v} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

für die Umgebung des Punktes $x=0$, sodann

$$(22.)\qquad \int_1^{x} (v-x)^{-\gamma}\, v^{\gamma-\sigma}\, dv \int_1^{v} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

für die Umgebung des Punktes $x=1$ und

$$(23.)\qquad \int_0^{1} (v-x)^{-\gamma}\, v^{\gamma-\sigma}\, dv \int_1^{v} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

für grosse Werthe von x. Bei den übrigen Hauptintegralen ist, der obigen Regel nach, das Werthepaar (g_2, h_2) beziehungsweise gleich $(0, x)$, $(0, \infty)$, (∞, x) zu setzen.

Schreibt man das Doppelintegral (16.) in der Form

$$\int_{g_2}^{h_2} (v-x)^{-\gamma}\, v^{\gamma-\sigma}\, V dv,$$

so sind die genannten drei Hauptintegrale (21.), (22.), (23.) dadurch charakterisirt, dass für V das mehrdeutige Hauptintegral von (12.) in der Umgebung von $v=1$

$$\int_1^{v} (u-v)^{\sigma-\beta-1}\, u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}\, du$$

gewählt wurde. Um die übrigen Hauptintegrale der Differentialgleichung (14.) im Gebiet des Punktes $x=0$ zu erhalten, setzt man für V die zwei Hauptintegrale der Gleichung (12.) im Gebiet des Punktes $v=0$, d. h. man nimmt in (16.) die Grenzen (g_1, h_1) gleich $(1, \infty)$, resp. $(0, v)$, während, wie oben erwähnt, $g_2 = 0$, $h_2 = x$ ist. In analoger Weise entstehen die übrigen beiden Hauptintegrale von (14.) für die grossen Werthe von x dadurch, dass für V die Hauptintegrale von (12.) im Bezirk der grossen Werthe von v substituirt, dass also in (16.) die Grenzen (g_1, h_1) gleich $(0, 1)$, resp. (∞, v), und gleichzeitig die Grenzen g_2, h_2 gleich ∞, x gesetzt werden. Die Ausdrücke

$$(24.)\qquad \int_0^{x} dv \int_1^{\infty} \Phi(u,\ v,\ x)\, du,\qquad \int_0^{x} dv \int_0^{v} \Phi(u,\ v,\ x)\, du,$$

in denen $\Phi(u, v, x)$ die Function (17.) bezeichnet, stellen demnach Hauptintegrale von (14.) für die Umgebung von $x = 0$, und die Ausdrücke

$$(25.)\qquad \int_{\infty}^{x} dv \int_{0}^{1} \Phi(u,\ v,\ x)\,du,\qquad \int_{\infty}^{x} dv \int_{x}^{v} \Phi(u,\ v,\ x)\,du$$

Hauptintegrale für das Gebiet von $x = \infty$ dar.

In der Umgebung des Punktes $x = 1$ ist die Function (22.) die einzige mehrdeutige Hauptlösung von (14.). Die Anzahl der eindeutigen Lösungen der Differentialgleichung ist für dieses Gebiet keine bestimmte; denn da zwei von einander unabhängige eindeutige Lösungen (mit den Anfangsexponenten 0 und 1) existiren, so erhält man durch Summation derselben, nachdem man sie mit beliebigen Constanten multiplicirt hat, stets wieder ein eindeutiges particuläres Integral. Lösungen, die bei $x = 1$ eindeutig sind und verhältnissmässig einfache Reihenentwickelungen liefern, werden erhalten, wenn man für V die Hauptintegrale der Gleichung (12.) im Bezirk von $v = 0$ oder auch die Hauptintegrale im Bezirk von $v = \infty$ einsetzt, während nach der oben angegebenen Regel $g_2 = 0$, $h_2 = \infty$ ist. Hierdurch entstehen die vier Doppelintegrale:

$$(26.)\qquad \begin{cases} \int_{0}^{\infty} dv \int_{1}^{x} \Phi(u,\ v,\ x)\,du, & \int_{0}^{\infty} dv \int_{0}^{v} \Phi(u,\ v,\ x)\,du, \\ \int_{0}^{x} dv \int_{0}^{1} \Phi(u,\ v,\ x)\,du, & \int_{0}^{x} dv \int_{\infty}^{v} \Phi(u,\ v,\ x)\,du. \end{cases}$$

In denselben soll, was nach § 1 erlaubt ist, die negative reelle Axe als Integrationsweg der Variablen v gewählt werden, sodass bei genauerer Bezeichnung die obere Grenze der Integration nach v gleich $-\infty$ zu nehmen ist.

Um die behaupteten Eigenschaften der Integrale (21.) bis (26.), welche man als convergent voraussetzt, nachzuweisen, führt man an Stelle von u und v neue Variable ein. In (21.) setzt man

$$u = \frac{v}{v - \mathfrak{u}(v-1)} = \frac{1}{1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}},\quad v = \frac{1}{1-\mathfrak{v}};$$

dann werden die Grenzen sowohl für die Integration nach $\mathfrak{u}$ als für die nach $\mathfrak{v}$ gleich 0 und 1, und das Integral transformirt sich in das folgende:

$$\int_{0}^{1} \mathfrak{v}^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1}(1-\mathfrak{v})^{\beta-1}[1-x(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma} d\mathfrak{v} \int_{0}^{1} \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(\mathfrak{u}-1)^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\alpha-\sigma} d\mathfrak{u}.$$

Wird hierin die Grösse $[1-x(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}$ nach dem binomischen Satze entwickelt, so sind die einzelnen Potenzen von x mit constanten Doppelinte-

gralen multiplicirt, auf welche die Gleichung (19.) anwendbar ist. Man erhält auf diese Weise die Reihe

$$(-1)^{\sigma-\beta-1}\Big\{E(\varrho-\alpha,\ \alpha)E(\sigma-\beta,\ \beta)+\frac{\gamma}{1}E(\varrho-\alpha,\ \alpha+1)E(\sigma-\beta,\ \beta+1)x$$
$$+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}E(\varrho-\alpha,\ \alpha+2)E(\sigma-\beta,\ \beta+2)x^2+\cdots\Big\},$$

welche durch Benutzung der Reductionsformel (18.) in

$$(-1)^{\sigma-\beta-1}E(\varrho-\alpha,\ \alpha)E(\sigma-\beta,\ \beta)\Big\{1+\frac{\alpha\beta\gamma}{1.\varrho\sigma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)}x^2+\cdots\Big\}$$

übergeht. Für die in der Klammer stehende Reihe werde, gemäss der von Herrn *Goursat* vorgeschlagenen Erweiterung der *Gauss*schen Bezeichnung, der Buchstabe F mit den sechs Argumenten $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varrho,\ \sigma,\ x$ eingeführt; jedoch soll sowohl die Gruppe $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ von der Gruppe $\varrho,\ \sigma$, als auch letztere von x durch je ein Semikolon getrennt werden. Man nennt demnach:

$$(27.)\quad \begin{cases} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varrho,\ \sigma;\ x) \;=\; 1+\dfrac{\alpha\beta\gamma}{1.\varrho\sigma}x+\cdots \\ \cdots+\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)}{1.2\ldots m.\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+m-1)\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+m-1)}x^m+\cdots \text{ inf.} \end{cases}$$

Indem man in (21.) das Product $(-1)^{\sigma-\beta-1}(v-u)^{\sigma-\beta-1}$ statt $(u-v)^{\sigma-\beta-1}$ einsetzt, gelangt man zu der Identität:

$$(28.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\infty}(v-x)^{-\gamma}v^{\gamma-\sigma}dv\int_1^{v}(v-u)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du \\ \displaystyle =\int_0^1\mathfrak{v}^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1}(1-\mathfrak{v})^{\beta-1}[1-x(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}d\mathfrak{v}\int_0^1\mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\alpha-\sigma}d\mathfrak{u} \\ = E(\alpha,\ \varrho-\alpha)E(\beta,\ \sigma-\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varrho,\ \sigma;\ x). \end{cases}$$

Die ersten drei Argumente der Function F können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso das vierte und das fünfte. Da die in der Gleichung (28.) vorkommenden Integrale dieses Verhalten nicht zeigen, so ergiebt sich aus derselben eine Anzahl verschiedener Darstellungen der Function F. Dass die Reihe (27.) für mod. $x<1$ convergent ist, folgt ohne Weiteres aus den bekannten Regeln.

Eine andere Darstellung der Reihe (27.) durch bestimmte Integrale wird durch die (bereits in der Einleitung erwähnte) Formel

$$(29.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\sigma-\beta-1}dv\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}(1-xuv)^{-\gamma}du \\ = E(\alpha,\ \varrho-\alpha)E(\beta,\ \sigma-\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varrho,\ \sigma;\ x) \end{cases}$$

angegeben, welche man durch Entwickelung der Potenz $(1-xuv)^{-\gamma}$ und Anwendung der Gleichung (18.) beweist. Mittelst derselben werden die beiden übrigen, in (24.) genannten Hauptlösungen des Gebiets des Punktes $x=0$ auf hypergeometrische Reihen dritter Ordnung zurückgeführt. Substituirt man in das erstere dieser Integrale

$$u = \frac{1}{\mathfrak{u}}, \quad v = x\mathfrak{v},$$

in das letztere

$$u = v\mathfrak{u} = x\mathfrak{u}\mathfrak{v}, \quad v = x\mathfrak{v},$$

so gehen dieselben in die Reihen

$$(30.) \quad \begin{cases} \text{Const. } x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1,\ \gamma-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1;\ x), \\ \text{Const. } x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1,\ \gamma-\varrho+1;\ 2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1;\ x) \end{cases}$$

über.

Die Hauptintegrale des Gebiets der grossen Werthe von x liefern ebenfalls Reihen von der Form (27.). In das Integral (23.) setze man

$$u = 1-\mathfrak{u}(1-v) = 1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}, \quad v = 1-\mathfrak{v},$$

in das erste der Integrale (25.) $v = \frac{x}{\mathfrak{v}}$, in das zweite

$$u = \frac{v}{\mathfrak{u}} = \frac{x}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}, \quad v = \frac{x}{\mathfrak{v}}.$$

Dann erweisen sich, wegen der Beziehungen (28.) und (29.), die genannten Integrale als identisch mit den Ausdrücken:

$$(31.) \quad \begin{cases} \text{Const. } x^{-\gamma} F\left(\gamma,\ \gamma-\varrho+1,\ \gamma-\sigma+1;\ \gamma-\alpha+1,\ \gamma-\beta+1;\ \frac{1}{x}\right), \\ \text{Const. } x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\varrho+1,\ \beta-\sigma+1;\ \beta-\alpha+1,\ \beta-\gamma+1;\ \frac{1}{x}\right), \\ \text{Const. } x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\varrho+1,\ \alpha-\sigma+1;\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1;\ \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Die Reihen, durch welche die Differentialgleichung (14.) in der Umgebung des Punktes $x=1$ integrirt wird, gehören nicht zu der in (27.) angegebenen Art. Das Doppelintegral (22.) verwandelt sich durch die Substitution

$$u-1 = (v-1)\mathfrak{u} = (x-1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}, \quad v-1 = (x-1)\mathfrak{v},$$

wenn von einer als Factor auftretenden Potenz von -1 abgesehen wird, in den Ausdruck:

$$(x-1)^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-\gamma}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1}(1-\mathfrak{v})^{-\gamma}[1+(x-1)\mathfrak{v}]^{\gamma-\sigma}d\mathfrak{v}$$
$$\times\int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}[1+(x-1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}]^{\beta-\varrho}d\mathfrak{u}.$$

Werden in demselben die zwei Potenzen

$$[1+(x-1)\mathfrak{v}]^{\gamma-\sigma},\quad [1+(x-1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}]^{\beta-\varrho}$$

nach dem binomischen Satze entwickelt, so erhält man eine Reihe, in welcher die Factoren der einzelnen Potenzen von $x-1$ sich aus Binomialcoefficienten und aus *Euler*schen Integralen erster Art zusammensetzen. Durch Anwendung der Formel (18.) schafft man die *Euler*schen Integrale fort bis auf zwei derselben, welche den ganzen Ausdruck multipliciren, wodurch sich die Uebereinstimmung des Integrals (22.) mit der durch directe Reihenintegration entstehenden, bei $x=1$ mehrdeutigen particulären Lösung von (14.) ergiebt.

Von den Integralen (26.) geht das erste durch die Substitution

$$u=\frac{1}{1-\mathfrak{u}},\quad v=\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}$$

in

$$(-1)^{\sigma-1}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\beta-1}[1+(x-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}d\mathfrak{v}\int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\alpha-\sigma}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\sigma-\beta-1}d\mathfrak{u}$$

über. Das zweite Integral (26.), welches in Bezug auf u die Grenzen 0 und v hat, verwandelt sich, wenn

$$u=\frac{\mathfrak{u}v}{\mathfrak{u}v-(v-1)}=\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1},\quad v=\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}$$

gesetzt wird, in den Ausdruck:

$$(-1)^{\alpha-\beta+\sigma-1}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\varrho}(1-\mathfrak{v})^{\beta-1}[1+(x-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}d\mathfrak{v}$$
$$\times\int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta-\varrho}(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\alpha-\sigma}d\mathfrak{u}.$$

Diese Form der bestimmten Integrale gestattet, da vorausgesetzt wird, dass die Constanten α, β, γ, ϱ, σ derartig sind, dass die Integrale einen Sinn haben, den directen Schluss, dass dieselben in der Umgebung des Punktes $x=1$ eindeutige und stetige Functionen von x sind. Denn beschreibt x eine kleine geschlossene Curve um den Punkt 1, so tritt weder eine Aenderung der Integrationswege, noch eine Aenderung des Werthes irgend eines

Integralelementes ein. Die Integrale bleiben also eindeutig und werden für $x = 1$ nicht unendlich. — Ein zweiter Beweis für die Eindeutigkeit und Stetigkeit der obigen Integrale bei $x = 1$ ergiebt sich aus den Reihenentwickelungen derselben. Wird die Potenz

$$[1+(x-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}$$

nach dem binomischen Satze entwickelt, so entstehen aus den zwei obigen Integralen, wenn von den Factoren $(-1)^{\sigma-1}$, $(-1)^{\alpha-\beta+\sigma-1}$ abgesehen wird, die Reihen

$$K_0-\frac{\gamma}{1}K_1(x-1)+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}K_2(x-1)^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^\nu\frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}{1.2\dots\nu}K_\nu(x-1)^\nu+\cdots,$$
$$L_0-\frac{\gamma}{1}L_1(x-1)+\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}L_2(x-1)^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^\nu\frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}{1.2\dots\nu}L_\nu(x-1)^\nu+\cdots,$$

wo K_ν, L_ν die constanten Doppelintegrale

$$K_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\beta+\nu-1}d\mathfrak{v}\int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\alpha-\sigma}\quad(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\sigma-\beta-1}d\mathfrak{u},$$
$$L_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\varrho}(1-\mathfrak{v})^{\beta+\nu-1}d\mathfrak{v}\int_0^1 \mathfrak{u}^{\beta-\varrho}\quad(1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\alpha-\sigma}\quad d\mathfrak{u}$$

bedeuten. Die letzteren haben die Eigenschaft, dass je drei Grössen K_ν, $K_{\nu+1}$, $K_{\nu+2}$, resp. L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ durch eine homogene lineare Relation verbunden sind, und zwar ist diese Relation mit der im § 3 abgeleiteten Gleichung (20.) identisch. Ein Integral

$$(32.)\qquad \int_0^x (v-x)^{-\gamma}v^{\gamma-\sigma}V dv,$$

in welchem V eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (12.) ist, geht, wenn die negative reelle Axe als Integrationsweg von v gewählt wird, durch die Substitution $v = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}-1}$ in den Ausdruck

$$(-1)^{\sigma-1}\int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma-2}[1+(x-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}\,V d\mathfrak{v}$$

über. Nach Anwendung des binomischen Satzes auf $[1+(x-1)(1-\mathfrak{v})]^{-\gamma}$ liefert dasselbe, abgesehen vom Factor $(-1)^{\sigma-1}$, die Reihe:

$$(33.)\quad \begin{cases} A_0 - \frac{\gamma}{1} A_1(x-1) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2} A_2(x-1)^2 - \cdots \\ \cdots + (-1)^\nu \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}{1.2\ldots\nu} A_\nu(x-1)^\nu + \cdots, \end{cases}$$

in welcher A_ν das constante Integral

$$A_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\gamma-\sigma}(1-\mathfrak{v})^{\sigma+\nu-2}\, V d\mathfrak{v}$$

bezeichnet. Der Vergleich mit der Formel (20.) zeigt, dass die in letzterer vorkommenden drei Integrale die Grössen A_ν, $A_{\nu+1}$, $A_{\nu+2}$ sind. Also besteht zwischen A_ν, $A_{\nu+1}$, $A_{\nu+2}$ die Relation:

$$\begin{gathered}(\gamma+\nu+1)(\alpha+\beta+\gamma+\nu-\varrho-\sigma+2)A_{\nu+2} \\ -[(\alpha+\nu+1)(\beta+\nu+1)(\gamma+\nu+1)-(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\gamma+\nu)-(\varrho+\nu)(\sigma+\nu)]A_{\nu+1} \\ +(\alpha+\nu)(\beta+\nu)A_\nu = 0.\end{gathered}$$

Statt A_ν, $A_{\nu+1}$, $A_{\nu+2}$ kann man in derselben einerseits K_ν, $K_{\nu+1}$, $K_{\nu+2}$, andererseits L_ν, $L_{\nu+1}$, $L_{\nu+2}$ setzen, da die zwei behandelten Integrale (26.) aus (32.) für die respectiven Werthe

$$\int_1^\infty (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1} du, \quad \int_0^v (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$

der Function V erhalten werden. — Integrirt man nun die Differentialgleichung (14.) durch eine Reihe

$$(34.)\quad y = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \cdots,$$

so findet zwischen c_ν, $c_{\nu+1}$, $c_{\nu+2}$ die homogene lineare Beziehung

$$\begin{gathered}(\nu+1)(\nu+2)(\alpha+\beta+\gamma+\nu-\varrho-\sigma+2)c_{\nu+2} \\ +(\nu+1)[(\alpha+\nu+1)(\beta+\nu+1)(\gamma+\nu+1)-(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\gamma+\nu)-(\varrho+\nu)(\sigma+\nu)]c_{\nu+1} \\ +(\alpha+\nu)(\beta+\nu)(\gamma+\nu)c_\nu = 0\end{gathered}$$

statt. Die Grössen c_0, c_1 bleiben willkürlich; c_2, c_3, ... werden als eindeutige Functionen von c_0 und c_1 bestimmt, weil nach der Voraussetzung $\alpha+\beta+\gamma-\varrho-\sigma$ keine negative ganze Zahl ist. Die Reihe (34.) ist in der Umgebung des Punktes $x=1$ convergent, wie auch die Werthe von c_0 und c_1 gewählt sein mögen *). Aus der Gleichung zwischen c_ν, $c_{\nu+1}$, $c_{\nu+2}$ entsteht aber, wenn

*) Man vergleiche die Abhandlung des Verfassers „über einfache singuläre Punkte etc." im 73. Bande dieses Journals.

$$c_0 = c'_0, \quad c_1 = -\frac{\gamma}{1} c'_1,$$

$$c_2 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2} c'_2, \quad \dots \quad c_\nu = (-1)^\nu \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}{1.2\dots\nu} c'_\nu$$

gesetzt wird, eine Relation zwischen c'_ν, $c'_{\nu+1}$, $c'_{\nu+2}$, welche mit der für A_ν, $A_{\nu+1}$, $A_{\nu+2}$ abgeleiteten völlig gleichlautend ist. Hierdurch ist die Convergenz der Reihe (33.) allgemein bewiesen. Denn nachdem man

$$c' = A_0, \quad c'_1 = A_1$$

gewählt hat, sind wegen jener linearen Relation sämmtliche Grössen c'_ν gleich den Integralen A_ν, so dass die Reihe (33.) auf die als convergent bekannte Reihe (34.) zurückkommt. Das bestimmte Integral (32.) stellt mithin eine in der Umgebung des Punktes $x = 1$ eindeutige und stetige Function von x dar.

Es bleibt übrig, das dritte und das vierte Integral (26.), welche ebenfalls eindeutig und stetig bei $x = 1$ sind, durch Substitution umzuformen. Dieselben nehmen, wenn beziehungsweise

$$u = 1-\mathfrak{u}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}},$$

$$u = \frac{\mathfrak{u}+v-1}{\mathfrak{u}} = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}, \quad v = \frac{\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{v}}$$

gesetzt wird, die Form

$$(-1)^{\varrho-\sigma-\alpha} \int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta-1}(1-\mathfrak{v})^{\gamma-\sigma}[1+(x-1)\mathfrak{v}]^{-\gamma} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\beta-\varrho} \quad (1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\sigma-\beta-1} d\mathfrak{u},$$

$$(-1)^{1-\alpha} \quad \int_0^1 \mathfrak{v}^{\alpha-1}(1-\mathfrak{v})^{\gamma-\sigma}[1+(x-1)\mathfrak{v}]^{-\gamma} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha-\sigma} \quad (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\beta-\varrho} \quad d\mathfrak{u}$$

an. Durch Entwickelung der Potenz $[1+(x-1)\mathfrak{v}]^{-\gamma}$ entstehen hieraus, wenn von den Factoren $(-1)^{\varrho-\sigma-\alpha}$, $(-1)^{1-\alpha}$ abgesehen wird, die Reihen

$$\mathfrak{K}_0 - \frac{\gamma}{1}\mathfrak{K}_1(x-1) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}\mathfrak{K}_2(x-1)^2 - \dots + (-1)^\nu \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}{1.2\dots\nu}\mathfrak{K}_\nu(x-1)^\nu + \dots,$$

$$\mathfrak{L}_0 - \frac{\gamma}{1}\mathfrak{L}_1(x-1) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}\mathfrak{L}_2(x-1)^2 - \dots + (-1)^\nu \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1)}{1.2\dots\nu}\mathfrak{L}_\nu(x-1)^\nu + \dots,$$

in denen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{L}_\nu$ die constanten Integrale

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\beta+\nu-1}(1-\mathfrak{v})^{\gamma-\sigma} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1}(1-\mathfrak{u})^{\beta-\varrho} \quad (1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\sigma-\beta-1} d\mathfrak{u},$$

$$\mathfrak{L}_\nu = \int_0^1 \mathfrak{v}^{\alpha+\nu-1}(1-\mathfrak{v})^{\gamma-\sigma} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{\alpha-\sigma} \quad (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1}(1-\mathfrak{u}\mathfrak{v})^{\beta-\varrho} \quad d\mathfrak{u}$$

bedeuten. Die letzteren Reihen sind, wie die vorher betrachteten, specielle Fälle der Reihe (33.); denn für $\mathfrak{v} = 1-\mathfrak{v}'$ gehen $\mathfrak{K}_\nu$, $\mathfrak{L}_\nu$ in Integrale von der Form $\mathit{\Lambda}_\nu$ über.

§ 5.

Die im Vorstehenden entwickelte Integrationsmethode soll zunächst auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung ausgedehnt werden. Es werde y durch die zu (3.) und (5.) analoge Differentialgleichung

$$(35.)\quad \left\{\begin{aligned} & f_4(x)\frac{d^4y}{dx^4}+[(\delta+3)_1 f_4'(x)-f_3(x)]\frac{d^3y}{dx^3} \\ & +[(\delta+3)_2 f_4''(x)-(\delta+2)_1 f_3'(x)+f_2(x)]\frac{d^2y}{dx^2} \\ & +[(\delta+3)_3 f_4'''(x)-(\delta+2)_2 f_3''(x)+(\delta+1)_1 f_2'(x)-f_1(x)]\frac{dy}{dx} \\ & +[(\delta+3)_4 f_4^{\mathrm{IV}}(x)-(\delta+2)_3 f_3'''(x)+(\delta+1)_2 f_2''(x)-(\delta)_1 f_1'(x)]y \end{aligned}\right\} = 0$$

bestimmt, in welcher $f_k(x)$ für $k=1, 2, 3, 4$ eine ganze Function des $k$ten oder eines niedrigeren Grades von x, und δ eine Constante bedeutet; die Grössen $(\delta+\mu)_\nu$ sind Binomialcoefficienten, $f_k'(x)$, $f_k''(x)$, ... die Ableitungen von $f_k(x)$. Man substituirt für y das Integral

$$(36.)\quad y = \int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta}\mathfrak{W}\,dw$$

und setzt in demselben die Grösse $\mathfrak{W}$ als eine Function von w allein, g_3 als constant, h_3 entweder als constant oder gleich x voraus. Indem man, falls $h_3 = x$ ist, $\delta+3$ als negativ annimmt, ergiebt sich für $k=1, 2, 3, 4$:

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \delta\ldots(\delta+k-1)\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-k}\mathfrak{W}\,dw.$$

Zur Abkürzung möge die bereits in der Einleitung erwähnte Bezeichnung

$$(37.)\quad \left\{\begin{aligned} & [q]_m = q(q-1)(q-2)\ldots(q-m+1), \quad [q]_0 = 1, \\ & [q]_m^+ = q(q+1)(q+2)\ldots(q+m-1), \quad [q]_0^+ = 1, \end{aligned}\right.$$

eingeführt werden. Dann erhält man aus (35.) die Gleichung

$$\begin{aligned} & [\delta]_4^+\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-4}\mathfrak{W}\left\{f_4(x)+f_4'(x)\frac{w-x}{1}+\cdots+f_4^{\mathrm{IV}}(x)\frac{(w-x)^4}{1.2.3.4}\right\}dw \\ & -[\delta]_3^+\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-3}\mathfrak{W}\left\{f_3(x)+f_3'(x)\frac{w-x}{1}+f_3''(x)\frac{(w-x)^2}{1.2}+f_3'''(x)\frac{(w-x)^3}{1.2.3}\right\}dw \\ & +[\delta]_2^+\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-2}\mathfrak{W}\left\{f_2(x)+f_2'(x)\frac{w-x}{1}+f_2''(x)\frac{(w-x)^2}{1.2}\right\}dw \\ & -[\delta]_1^+\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-1}\mathfrak{W}\left\{f_1(x)+f_1'(x)\frac{w-x}{1}\right\}dw = 0 \end{aligned}$$

oder, da durch δ dividirt werden kann, und die von den f abhängigen Summen nach dem *Taylor*schen Satz beziehungsweise gleich $f_4(w)$, $f_3(w)$, $f_2(w)$, $f_1(w)$ sind, die folgende:

$$(38.)\quad \begin{cases} (\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-4}f_4(w)\mathfrak{W}\,dw \\ -(\delta+1)(\delta+2)\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-3}f_3(w)\mathfrak{W}\,dw \\ +(\delta+1)\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-2}f_2(w)\mathfrak{W}\,dw \\ -\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-1}f_1(w)\mathfrak{W}\,dw \;=\; 0. \end{cases}$$

Die Formel der theilweisen Integration, aus der sich zunächst

$$(\delta+k-1)\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-k}f_k(w)\mathfrak{W}\,dw \;=\; \begin{cases} -[(w-x)^{-\delta-k+1}f_k(w)\mathfrak{W}]_{w=g_3}^{w=h_3} \\ +\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-k+1}\dfrac{d(f_k(w)\mathfrak{W})}{dw}\,dw \end{cases}$$

ergiebt, werde wiederholt angewendet, in der Art, dass schliesslich in (38.) die Variable x hinter dem Integralzeichen nur in der Potenz $(w-x)^{-\delta-1}$ vorkommt. Dann entsteht aus (38.) die Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} [M_3]_{w=h_3}-[M_3]_{w=g_3} \\ +\int_{g_3}^{h_3}(w-x)^{-\delta-1}\left[\dfrac{d^3(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw^3}-\dfrac{d^2(f_3(w)\mathfrak{W})}{dw^2}+\dfrac{d(f_2(w)\mathfrak{W})}{dw}-f_1(w)\mathfrak{W}\right]dw \end{array}\right\} = 0,$$

wo M_3 den Ausdruck

$$(39.)\quad M_3 = \begin{cases} -(\delta+1)(\delta+2)(w-x)^{-\delta-3}f_4(w)\mathfrak{W} \\ +(\delta+1)(w-x)^{-\delta-2}\left[f_3(w)\mathfrak{W}-\dfrac{d(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw}\right] \\ -(w-x)^{-\delta-1}\left[f_2(w)\mathfrak{W}-\dfrac{d(f_3(w)\mathfrak{W})}{dw}+\dfrac{d^2(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw^2}\right] \end{cases}$$

bedeutet. Man stellt für die bisher beliebige Function $\mathfrak{W}$ die Differentialgleichung

$$(40.)\quad \frac{d^3(f_4(w)\mathfrak{W})}{dw^3}-\frac{d^2(f_3(w)\mathfrak{W})}{dw^2}+\frac{d(f_2(w)\mathfrak{W})}{dw}-f_1(w)\mathfrak{W} = 0$$

auf und sucht die Grenzen g_3, h_3 so zu bestimmen, dass

$$[M_3]_{w=h_3}-[M_3]_{w=g_3} = 0$$

ist. Dann gewinnt man, falls eine der Gleichung (40.) genügende Function

$\mathfrak{W}$ angegeben werden kann, in dem Ausdruck (36.) eine Lösung der Differentialgleichung (35.).

Durch passende Wahl der ganzen Functionen $f_1, \dots f_4$ kann nun die Gleichung (40.) auf die im § 2 behandelte Gleichung (14.) zurückgeführt werden. Man verbinde die Function $\mathfrak{W}$ mit einer neuen Unbekannten W durch die Gleichung

$$(41.)\qquad \mathfrak{W} = w^{\delta-\tau} W,$$

wo τ eine Constante bedeutet, so dass für W die Differentialgleichung

$$\frac{d^3(w^{\delta-\tau}f_4(w)W)}{dw^3} - \frac{d^2(w^{\delta-\tau}f_3(w)W)}{dw^2} + \frac{d(w^{\delta-\tau}f_2(w)W)}{dw} - w^{\delta-\tau}f_1(w)W = 0$$

erhalten wird. Nach Division mit der Potenz $w^{\delta-\tau+1}$ lässt sich die letztere Gleichung auf die Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} w^2(w-1)\dfrac{d^3W}{dw^3} + w[(\alpha'+\beta'+\gamma'+3)w-(\varrho'+\sigma'+1)]\dfrac{d^2W}{dw^2} \\ +[(\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'+\alpha'\beta'+\alpha'+\beta'+\gamma'+1)w-\varrho'\sigma']\dfrac{dW}{dw}+\alpha'\beta'\gamma' W \end{array}\right\} = 0$$

bringen, so dass man für W die Doppelintegrale (16.) setzen darf, nachdem daselbst für $x, \alpha, \beta, \gamma, \varrho, \sigma$ die Grössen $w, \alpha', \beta', \gamma', \varrho', \sigma'$ eingetreten sind. In Analogie zu (11.) führt man statt der Constanten $\alpha', \beta', \gamma', \varrho', \sigma'$ andere Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \sigma$ ein mittelst der Gleichungen

$$\alpha' = \alpha-\tau+1,\quad \beta'=\beta-\tau+1,\quad \gamma'=\gamma-\tau+1,\quad \varrho'=\varrho-\tau+1,\quad \sigma'=\sigma-\tau+1;$$

ferner bezeichnet man durch $q_2(w)$, $q_1(w)$ die linearen Functionen

$$(42.)\qquad \begin{cases} q_2(w) = (\alpha+\beta+\gamma-3\tau+6)w-(\varrho+\sigma-2\tau+3), \\ q_1(w) = [(\beta-\tau)(\gamma-\tau)+(\gamma-\tau)(\alpha-\tau)+(\alpha-\tau)(\beta-\tau) \\ \qquad\qquad +3(\alpha+\beta+\gamma-3\tau)+7]w-(\varrho-\tau+1)(\sigma-\tau+1). \end{cases}$$

Die aus (40.), (41.) folgende Gleichung für W wird mit der letztgenannten Differentialgleichung dritter Ordnung identisch, falls $f_1(w), \dots f_4(w)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & w^{\delta-\tau}f_4(w) = w^{\delta-\tau+3}(w-1), \\ & w^{\delta-\tau}f_3(w) - 3\frac{d(w^{\delta-\tau}f_4(w))}{dw} = -w^{\delta-\tau+2}q_2(w), \\ & w^{\delta-\tau}f_2(w) - 2\frac{d(w^{\delta-\tau}f_3(w))}{dw} + 3\frac{d^2(w^{\delta-\tau}f_4(w))}{dw^2} = w^{\delta-\tau+1}q_1(w), \\ & w^{\delta-\tau}f_1(w) - \frac{d(w^{\delta-\tau}f_2(w))}{dw} + \frac{d^2(w^{\delta-\tau}f_3(w))}{dw^2} - \frac{d^3(w^{\delta-\tau}f_4(w))}{dw^3} \\ & \qquad = -(\alpha-\tau+1)(\beta-\tau+1)(\gamma-\tau+1)w^{\delta-\tau+1} \end{aligned}$$

bestimmt werden. Durch Auflösung desselben erhält man, wenn zur Abkürzung $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varrho_1, \sigma_1, \tau_1$ als die Constanten

$$\begin{cases} \alpha_1 = \delta-\alpha+1, & \beta_1 = \delta-\beta+1, \quad \gamma_1 = \delta-\gamma+1, \\ \varrho_1 = \delta-\varrho+1, & \sigma_1 = \delta-\sigma+1, \quad \tau_1 = \delta-\tau+1 \end{cases}$$

definirt werden, die Werthe:

$$\begin{aligned} f_4(w) &= w^3(w-1), \\ f_3(w) &= (\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+3)w^3-(\varrho_1+\sigma_1+\tau_1+3)w^2, \\ f_2(w) &= (\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1+\alpha_1\beta_1+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+1)w^2 \\ &\quad -(\sigma_1\tau_1+\tau_1\varrho_1+\varrho_1\sigma_1+\varrho_1+\sigma_1+\tau_1+1)w, \\ f_1(w) &= \alpha_1\beta_1\gamma_1 w-\varrho_1\sigma_1\tau_1. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für W lautet auf diese Weise

$$(43.)\quad \begin{cases} w^2(w-1)\dfrac{d^3W}{dw^3}+wq_2(w)\dfrac{d^2W}{dw^2}+q_1(w)\dfrac{dW}{dw} \\ +(\alpha-\tau+1)(\beta-\tau+1)(\gamma-\tau+1)W = 0, \end{cases}$$

wo $q_1(w)$ und $q_2(w)$ die Ausdrücke (42.) sind, und derselben wird nach § 2 durch Doppelintegrale von der Form

$$W = \int_{g_2}^{h_2}(v-w)^{\tau-\gamma-1}v^{\gamma-\sigma}dv\int_{g_1}^{h_1}(u-v)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du$$

genügt, deren Grenzen g_1, h_1, g_2, h_2 die Werthe 0, 1, ∞, v, resp. w haben.

Indem man die gefundenen Werthe von f_1, f_2, f_3, f_4 in (35.) substituirt, findet man für y die Differentialgleichung

$$(44.)\quad x^3(x-1)\frac{d^4y}{dx^4}+x^2Q_3(x)\frac{d^3y}{dx^3}+xQ_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q_1(x)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta\gamma\delta y = 0,$$

in welcher $Q_3(x)$, $Q_2(x)$, $Q_1(x)$ die linearen Functionen

$$(45.)\quad \begin{cases} Q_3(x) = (A_1+6)x-(R_1+3), \\ Q_2(x) = (A_2+3A_1+7)x-(R_2+R_1+1), \\ Q_1(x) = (A_3+A_2+A_1+1)x-\varrho\sigma\tau \end{cases}$$

bedeuten, während A_1, A_2, A_3, R_1, R_2 die Constanten

$$(46.)\quad \begin{cases} A_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta, \quad A_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta, \\ \qquad A_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta, \\ R_1 = \varrho+\sigma+\tau, \quad R_2 = \varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau \end{cases}$$

sind.

Der Bedingung

$$[M_3]_{w=h_3} - [M_3]_{w=g_3} = 0$$

ist genügt, wenn die Grenzen g_3, h_3 derartig gewählt werden, dass die Grösse M_3, die nach den obigen Bestimmungen in den Ausdruck

$$\begin{aligned}
M_3 = & -(w-x)^{-\delta-3} w^{\delta-\tau+3}(w-1)\left\{(\delta+1)(\delta+2)W+(\delta+1)(w-x)\frac{dW}{dw} \right. \\
& \left. \qquad +(w-x)^2\frac{d^2W}{dw^2}\right\} \\
& +(\delta+1)(w-x)^{-\delta-2} w^{\delta-\tau+2} W\{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-\tau_1)w-(\varrho_1+\sigma_1+1)\} \\
& -(w-x)^{-\delta-1} w^{\delta-\tau+1} W\{[\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\beta_1\gamma_1-(\tau_1+1)(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \\
& \qquad +(\tau_1+1)^2]w-\varrho_1\sigma_1\} \\
& +(w-x)^{-\delta-1} w^{\delta-\tau+2}\frac{dW}{dw}\{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\tau_1-3)w-(\varrho_1+\sigma_1-\tau_1-1)\}
\end{aligned}$$

übergeht, für $w = g_3$ und $w = h_3$ verschwindet. Da $\delta+3$ als negativ vorausgesetzt wird, so ist $M_3 = 0$ für $w = x$. Ferner wird, nach (28.) und (30.), das allgemeine Integral der Differentialgleichung (43.) in der Umgebung des Punktes $w = 0$ durch die Summe

$$\begin{aligned}
W = & \, c_1 F(\alpha-\tau+1,\ \beta-\tau+1,\ \gamma-\tau+1;\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ w) \\
& + c_2 w^{\tau-\sigma} F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1,\ \gamma-\sigma+1;\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ w) \\
& + c_3 w^{\tau-\varrho} F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1,\ \gamma-\varrho+1;\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ w)
\end{aligned}$$

angegeben, wo F die Reihe (27.) bedeutet, und c_1, c_2, c_3 willkürliche Constanten sind. Hieraus folgt, wie eine einfache Rechnung zeigt, dass $M_3 = 0$ für $w = 0$ ist, falls die Ungleichheiten

$$\delta-\varrho+1 > 0,\quad \delta-\sigma+1 > 0,\quad \delta-\tau+1 > 0$$

bestehen. Für grosse Werthe von w setzt sich nach (31.) das vollständige Integral von (43.) aus drei Reihen mit fallenden Potenzen von w zusammen, in denen die Anfangspotenzen gleich $w^{\tau-\alpha-1}$, $w^{\tau-\beta-1}$, $w^{\tau-\gamma-1}$ sind. Die Substitution dieser Werthe von W ergiebt, dass M_3 für $w = \infty$ verschwindet, wenn $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ist. Setzt man also voraus, dass die Constanten $\alpha, \beta, \ldots \tau$ die Bedingungen

$$\begin{cases} \alpha > 0,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0,\quad \delta+3 < 0, \\ \delta-\varrho+1 > 0,\quad \delta-\sigma+1 > 0,\quad \delta-\tau+1 > 0 \end{cases}$$

zugleich befriedigen, so ist der Ausdruck

$$y = \int_{g_3}^{h_3} (w-x)^{-\delta} w^{\delta-\tau} W\,dw$$

ein particuläres Integral von (44.), sobald für g_3, h_3 zwei der Werthe 0, ∞, x gewählt werden, und W der Differentialgleichung (43.) genügt. Da man (nach § 2) 21 verschiedene particuläre Integrale der Differentialgleichung (43.) angeben kann, so liefern die Werthepaare

$$(g_3,\ h_3) = (0,\ \infty),\quad (g_3,\ h_3) = (0,\ x),\quad (g_3,\ h_3) = (\infty,\ x)$$

im Ganzen 63 particuläre Lösungen von (44.), welche die Gestalt von dreifachen bestimmten Integralen haben.

Es kommt für das Integral (36.) ausserdem die Grenze 1 in Betracht. Man darf g_3 oder h_3 gleich 1 nehmen, wenn für W das dem Ausdruck (22.) entsprechende, in der Umgebung des Punktes $w = 1$ im Allgemeinen mehrdeutige particuläre Integral von (43.)

$$\int_1^w (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_1^v (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$
$$= (w-1)^{\varrho+\sigma+\tau-\alpha-\beta-\gamma-1} \{k_0 + k_1(w-1) + k_2(w-1)^2 + \cdots\}$$

substituirt wird, und $\varrho+\sigma+\tau-\alpha-\beta-\gamma-1 > 0$ ist, da M_3 in diesem Falle für $w = 1$ verschwindet. Wählt man dagegen für W eins der bei dem Punkte $w = 1$ eindeutigen particulären Integrale von (43.), deren Anfangsexponent gleich 0 oder 1 ist, so geht M_3 für $w = 1$ in ein Binom

$$\mathfrak{k}_1(x-1)^{-\delta-1} + \mathfrak{k}_2(x-1)^{-\delta-2}$$

über, wo $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ constant sind. Die correspondirenden Ausdrücke (36.) genügen daher einer nicht homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung. Die Benutzung der Grenze 1 für das Integral (36.) liefert auf diese Weise nur drei particuläre Lösungen von (44.).

Die erhaltenen 66 particulären Integrale von (44.) haben die Form

$$(47.)\qquad y = \int_{g_3}^{h_3} dw \int_{g_2}^{h_2} dv \int_{g_1}^{h_1} \Phi(u,\ v,\ w,\ x)\, du,$$

wo zur Abkürzung durch $\Phi(u, v, w, x)$ die Function

$$(48.)\quad \Phi(u, v, w, x) = (w-x)^{-\delta} w^{\delta-\tau} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

bezeichnet wird. Die Integration nach u ist zuerst, die nach w zuletzt auszuführen. Die Integralgrenzen haben die Werthe

$$\begin{cases} g_1,\ h_1 = 0,\ 1,\ \infty,\ v, \\ g_2,\ h_2 = 0,\ 1,\ \infty,\ w, \\ g_3,\ h_3 = 0,\ 1,\ \infty,\ x, \end{cases}$$

mit der Beschränkung, dass, wenn g_2 (oder h_2) gleich 1 gewählt wird,

$g_1 = 1$, $h_1 = v$ genommen werden muss (§ 2), und dass, wenn g_3 (oder h_3) gleich 1 ist, gemäss obiger Rechnung die Werthe $g_1 = 1$, $h_1 = v$, $g_2 = 1$, $h_2 = w$ anzuwenden sind.

In Betreff der Constanten $\alpha, \beta, \dots \tau$ wird angenommen, dass keiner der Ausdrücke

$$\begin{cases} \alpha-\beta, \quad \alpha-\gamma, \quad \alpha-\delta, \quad \beta-\gamma, \quad \beta-\delta, \quad \gamma-\delta, \\ \varrho, \quad \sigma, \quad \tau, \quad \varrho-\sigma, \quad \varrho-\tau, \quad \sigma-\tau, \quad \varrho+\sigma+\tau-\alpha-\beta-\gamma-\delta \end{cases}$$

eine positive oder negative ganze Zahl oder Null sei. Dann sind sämmtliche Hauptintegrale der Differentialgleichung (44.) für die Umgebungen der singulären Punkte $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ in den Ausdrücken (47.) enthalten, und logarithmische Integrale ausgeschlossen. Um zu den Hauptintegralen zu gelangen, hat man bei der Wahl der Grenzen $g_1, \dots h_3$ analog wie im § 4 zu verfahren. Zunächst soll jedoch eine Formel für gewisse vielfache Integrale, welche im Fall des Doppelintegrals auf die Gleichung (19.) zurückkommt, abgeleitet werden.

§ 6.

Man bezeichne durch $S_1, S_2, \dots S_m$, während m eine beliebige positive ganze Zahl ist, die Ausdrücke

$$S_1 = s_1^{k_1+k_2+\dots+k_m-1}(1-s_1)^{l_1-1}, \quad S_2 = s_2^{k_2+k_3+\dots+k_m-1}(1-s_2)^{k_1-1}(1-s_1 s_2)^{l_2},$$
$$S_3 = s_3^{k_3+k_4+\dots+k_m-1}(1-s_3)^{k_2-1}(1-s_1 s_2 s_3)^{l_3}, \quad \dots$$
$$S_m = s_m^{k_m-1}(1-s_m)^{k_{m-1}-1}(1-s_1 s_2 \dots s_m)^{l_m}$$

und betrachte das m-fache Integral

$$(49.) \qquad J_m = \int_0^1 S_1 ds_1 \int_0^1 S_2 ds_2 \dots \int_0^1 S_m ds_m,$$

in welchem die Constanten $k_1, \dots k_m$, $l_1, \dots l_m$ nur in sofern beschränkt sind, als angenommen wird, dass J_m einen bestimmten Sinn habe. Die Grösse J_m ist gleich dem Product aus m einfachen Integralen. Definirt man nämlich $\varkappa_i$, λ_i als die Constanten

$$(50.) \qquad \varkappa_i = k_1 + k_2 + \dots + k_i, \quad \lambda_i = l_1 + l_2 + \dots + l_i$$

für $i = 1, 2, \dots m$, so besteht die Gleichung

$$(51.) \qquad J_m = E(k_1, \lambda_1) E(k_2, \varkappa_1 + \lambda_2) E(k_3, \varkappa_2 + \lambda_3) \dots E(k_m, \varkappa_{m-1} + \lambda_m),$$

in welcher, wie im § 3, der Buchstabe E zur Bezeichnung des *Euler*schen Integrals erster Gattung angewendet ist.

Die Formel (51.) soll durch Induction bewiesen werden. Man nenne

$$\mathfrak{S}_1 = s_1^{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}-1}(1-s_1)^{l_1-1},$$

sowie für $i=2, 3, \ldots m-1$

$$\mathfrak{S}_i = s_i^{k_i+k_{i+1}+\cdots+k_{m-1}-1}(1-s_i)^{k_{i-1}-1}(1-s_1 s_2\ldots s_i)^{l_i}.$$

Dann ist das Integral

$$J_{m-1} = \int_0^1 \mathfrak{S}_1\, ds_1 \int_0^1 \mathfrak{S}_2\, ds_2 \ldots \int_0^1 \mathfrak{S}_{m-1}\, ds_{m-1}$$

dasjenige, welches aus J_m entsteht, wenn m durch $m-1$ ersetzt wird. Man nimmt nun die Formel (51.) in dem Fall, dass $m-1$ für m eintritt, als richtig an, d. h. man setzt die Gültigkeit der Gleichung

$$J_{m-1} = E(k_1,\ \lambda_1)E(k_2,\ \varkappa_1+\lambda_2)E(k_3,\ \varkappa_2+\lambda_3)\ldots E(k_{m-1},\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})$$

voraus und zeigt, dass dann für J_m der Ausdruck (51.) erhalten wird. Hierdurch ist die genannte Formel allgemein bewiesen, da sie für $m=1$ (sowie auch für $m=2$) bekannt ist.

Wird in S_m für $(1-s_1 s_2\ldots s_m)^{l_m}$ die Reihenentwickelung

$$1-(l_m)_1 s_1 s_2\ldots s_m+(l_m)_2 s_1^2 s_2^2\ldots s_m^2-\cdots+(-1)^\nu (l_m)_\nu s_1^\nu s_2^\nu\ldots s_m^\nu+\cdots$$

substituirt, so trennt sich in der Reihe, die für J_m entsteht, bei jedem einzelnen Summandus das in Bezug auf die Variable s_m zu nehmende Integral als Factor ab. Der allgemeine Term der Reihe wird gleich dem Product aus

$$(-1)^\nu (l_m)_\nu \int_0^1 s_m^{k_m+\nu-1}(1-s_m)^{k_{m-1}-1} ds_m = (-1)^\nu (l_m)_\nu E(k_{m-1},\ k_m+\nu)$$

und dem $(m-1)$-fachen Integral

$$\int_0^1 \mathfrak{S}_1'\, ds_1 \int_0^1 \mathfrak{S}_2'\, ds_2 \ldots \int_0^1 \mathfrak{S}_{m-1}'\, ds_{m-1},$$

in welchem

$$\mathfrak{S}_1' = s_1^{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+k_m+\nu-1}(1-s_1)^{l_1-1},$$

und für $i=2, 3, \ldots m-1$

$$\mathfrak{S}_i' = s_i^{k_i+k_{i+1}+\cdots+k_{m-1}+k_m+\nu-1}(1-s_i)^{k_{i-1}-1}(1-s_1 s_2\ldots s_i)^{l_i}$$

gesetzt ist. Dieses $(m-1)$-fache Integral wird mit dem obigen Integral J_{m-1} identisch, falls man in letzterem die Constante k_{m-1} durch $k_{m-1}+k_m+\nu$ er-

setzt, dasselbe ist also nach der Voraussetzung gleich dem Ausdruck:

$$E(k_1,\ \lambda_1)E(k_2,\ \varkappa_1+\lambda_2)\dots E(k_{m-2},\ \varkappa_{m-3}+\lambda_{m-2})E(k_{m-1}+k_m+\nu,\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1}).$$

Für J_m ergiebt sich hiernach, wenn zur Abkürzung auch die Bezeichnung

$$J_{m-2} = E(k_1,\ \lambda_2)E(k_2,\ \varkappa_1+\lambda_2)E(k_3,\ \varkappa_2+\lambda_3)\dots E(k_{m-2},\ \varkappa_{m-3}+\lambda_{m-2})$$

angewendet wird, die Gleichung

$$J_m = J_{m-2}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(l_m)_\nu E(k_{m-1},\ k_m+\nu)E(k_{m-1}+k_m+\nu,\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})$$

oder, wegen der Formel (18.),

$$J_m = J_{m-2}E(k_{m-1},\ k_m)E(k_{m-1}+k_m,\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(l_m)_\nu\frac{k_m(k_m+1)\dots(k_m+\nu-1)}{(k_{m-1}+k_m+\varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})\dots}.$$

Hierin ist aber die Summe in Bezug auf den Index ν, da $\varkappa_m$ statt $k_{m-1}+k_m+\varkappa_{m-2}$ geschrieben werden kann, gleich der hypergeometrischen Reihe zweiter Ordnung

$$F(-l_m,\ k_m,\ \varkappa_m+\lambda_{m-1},\ 1)$$
$$= \frac{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1})\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1}+l_m-k_m)}{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1}+l_m)\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1}-k_m)} = \frac{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1})\Gamma(\varkappa_{m-1}+\lambda_m)}{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_m)\Gamma(\varkappa_{m-1}+\lambda_{m-1})}.$$

Indem man für $E(k_{m-1},k_m)$ und $E(k_{m-1}+k_m,\varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})$ die Quotienten

$$E(k_{m-1},\ k_m) = \frac{\Gamma(k_{m-1})\Gamma(k_m)}{\Gamma(k_{m-1}+k_m)},$$

$$E(k_{m-1}+k_m,\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1}) = \frac{\Gamma(k_{m-1}+k_m)\Gamma(\varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})}{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_{m-1})}$$

einsetzt, findet man

$$J_m = J_{m-2}\frac{\Gamma(k_{m-1})\Gamma(\varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})}{\Gamma(\varkappa_{m-1}+\lambda_{m-1})}\frac{\Gamma(k_m)\Gamma(\varkappa_{m-1}+\lambda_m)}{\Gamma(\varkappa_m+\lambda_m)}$$
$$= J_{m-2}E(k_{m-1},\ \varkappa_{m-2}+\lambda_{m-1})E(k_m,\ \varkappa_{m-1}+\lambda_m),$$

d. h.

$$J_m = E(k_1,\ \lambda_1)E(k_2,\ \varkappa_1+\lambda_2)E(k_3,\ \varkappa_2+\lambda_3)\dots E(k_m,\ \varkappa_{m-1}+\lambda_m),$$

wie behauptet wurde.

Für $m=3$ erhält man aus (51.) die Gleichung

$$(52.)\quad \int_0^1 S_1ds_1\int_0^1 S_2ds_2\int_0^1 S_3ds_3 = E(k_1,\ l_1)E(k_2,\ k_1+l_1+l_2)E(k_3,\ k_1+k_2+l_1+l_2+l_3),$$

wo S_1, S_2, S_3 die Functionen

$$S_1 = s_1^{k_1+k_2+k_3-1}(1-s_1)^{l_1-1},\quad S_2 = s_2^{k_2+k_3-1}(1-s_2)^{k_1-1}(1-s_1s_2)^{l_2},$$
$$S_3 = s_3^{k_3-1}(1-s_3)^{k_2-1}(1-s_1s_2s_3)^{l_3}$$

bedeuten.

§ 7.

Für die Grenzen $g_1, \dots h_3$ des dreifachen Integrals (47.) ist im § 5 eine Anzahl von Werthen ermittelt worden, durch deren Anwendung sich im Ganzen 66 verschiedene particuläre Lösungen der Differentialgleichung (44.) ergaben. Es sollen nun unter letzteren die Hauptintegrale für die Gebiete der singulären Punkte ausgesondert werden. Für die Grenzen g_3, h_3 der Integration nach w hat man (in Analogie zu § 1 und § 4) die Regel zu befolgen, dass, wenn der Ausdruck (47.) eine Hauptlösung im Gebiet von $x=0$, $x=1$ oder $x=\infty$ sein soll, entweder der betreffende singuläre Punkt und der Werth x oder aber die beiden übrigen singulären Punkte für g_3, h_3 gesetzt werden. Die Grenzen g_2, h_2 erhalten nach § 5 die Werthe $1, w$, wenn g_3 oder h_3 gleich 1 ist; findet letzteres nicht statt, so hat man bei den Hauptintegralen die Grenzen g_2, h_2 entweder gleich dem betreffenden singulären Punkt und dem Werthe w, oder gleich den beiden anderen singulären Punkten zu nehmen. Die entsprechende Regel gilt auch für g_1, h_1, wenn man w durch v ersetzt und den Umstand berücksichtigt, dass g_1 und h_1 die Werthe 1 und v haben, sobald g_2 oder h_2 gleich 1 ist.

Die obigen Regeln lassen sich kurz zusammenfassen. Tritt bei dem Ausdruck (47.) der Werth 1 als Grenze für eine Integration auf, so sind für die vorhergehenden Integrationen die Grenze 1 und die variable Grenze anzuwenden; denn sonst wäre (nach § 5 und § 2) das Integral (47.) keine Lösung von (44.). Im Uebrigen sind, wenn der Ausdruck (47.) ein Hauptintegral für das Gebiet eines singulären Punktes sein soll, für jede der drei Integrationen entweder dieser singuläre Punkt und die variable Grenze (d. h. x, w, v) oder die zwei anderen singulären Punkte als Integralgrenzen zu wählen.

Hiernach werden die Hauptintegrale der Differentialgleichung (44.) in der Umgebung des Punktes $x=0$ durch die vier Ausdrücke

$$(53.)\quad \begin{cases} \int_1^\infty dw \int_1^w dv \int_1^v \Phi\, du, & \int_0^x dw \int_1^x dv \int_1^v \Phi\, du, \\ \int_0^x dw \int_0^w dv \int_1^\infty \Phi\, du, & \int_0^x dw \int_0^w dv \int_0^v \Phi\, du, \end{cases}$$

in denen Φ die Function (48.) bedeutet, angegeben. Ferner sind

$$(54.)\quad \begin{cases} \int_0^1 dw \int_1^w dv \int_1^v \Phi du, & \int_\infty^x dw \int_0^1 dv \int_1^v \Phi du, \\ \int_\infty^x dw \int_\infty^w dv \int_0^1 \Phi du, & \int_\infty^x dw \int_\infty^w dv \int_\infty^v \Phi du \end{cases}$$

die vier Hauptlösungen im Gebiet von $x = \infty$. In der Umgebung des Punktes $x = 1$ ist der Ausdruck

$$(55.)\quad \int_1^x dw \int_1^w dv \int_1^v \Phi du$$

das einzige mehrdeutige Hauptintegral der Gleichung (44.). Da in diesem Bezirke, wie aus der Form der Coefficienten von (44.) unmittelbar folgt, drei von einander unabhängige eindeutige Particulärlösungen mit den Anfangsexponenten 0, 1 und 2 vorhanden sind, so lassen sich daselbst weitere Hauptintegrale nicht angeben. Jedoch zeigt sich, dass die zu (26.) analogen Integrale

$$(56.)\quad \int_0^\infty (w-x)^{-\delta} w^{\delta-\tau} W dw,$$

in denen für W ein Hauptintegral der Differentialgleichung (43.) im Gebiet von $w = 0$ oder von $w = \infty$ eingesetzt wird, sich durch Anwendung einfacher Substitutionen auf die Grenzen 0 und 1 bringen und in convergente, nach positiven Potenzen von $x-1$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen.

Die Integrale (53.) und (54.) liefern hypergeometrische Reihen vierter Ordnung. In das erste der Integrale (53.), welches bei $x = 0$ eindeutig und stetig ist, führt man statt u, v, w neue Variablen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ein mittelst der Gleichungen

$$u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, \quad v = \frac{1}{1-\mathfrak{v}\mathfrak{w}}, \quad w = \frac{1}{1-\mathfrak{w}},$$

wodurch das Integral in

$$(-1)^{\sigma+\tau-\beta-\gamma} \int_0^1 \mathfrak{w}^{\varrho+\sigma+\tau-\alpha-\beta-\gamma-1} (1-\mathfrak{w})^{\gamma-1} [1-x(1-\mathfrak{w})]^{-\delta} d\mathfrak{w}$$
$$\times \int_0^1 \mathfrak{v}^{\varrho+\sigma-\alpha-\beta-1} (1-\mathfrak{v})^{\tau-\gamma-1} (1-\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{\beta-\tau} d\mathfrak{v} \int_0^1 \mathfrak{u}^{\varrho-\alpha-1} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\beta-1} (1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{\alpha-\sigma} d\mathfrak{u}$$

übergeht. Entwickelt man $[1-x(1-\mathfrak{w})]^{-\delta}$ nach dem binomischen Satz, so entsteht aus dem letzteren Ausdruck die Reihe

$$(-1)^{\sigma+\tau-\beta-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\delta(\delta+1)\dots(\delta+\nu-1)}{1.2\dots\nu} x^\nu \Omega_\nu,$$

in welcher die Grösse Ω_ν mit dem Integral (52.) übereinstimmt, wenn in diesem

$$k_1 = \tau-\gamma,\quad k_2 = \sigma-\beta,\quad k_3 = \varrho-\alpha,\quad l_1 = \gamma+\nu,\quad l_2 = \beta-\tau,\quad l_3 = \alpha-\sigma$$

genommen wird. Indem man für Ω_ν den in (52.) angegebenen Werth

$$\Omega_\nu = E(\tau-\gamma,\ \gamma+\nu)E(\sigma-\beta,\ \beta+\nu)E(\varrho-\alpha,\ \alpha+\nu)$$
$$= E(\alpha,\varrho-\alpha)E(\beta,\sigma-\beta)E(\gamma,\tau-\gamma)\frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots(\alpha+\nu-1)(\beta+\nu-1)(\gamma+\nu-1)}{\varrho\sigma\tau(\varrho+1)(\sigma+1)(\tau+1)\dots(\varrho+\nu-1)(\sigma+\nu-1)(\tau+\nu-1)}$$

substituirt und für das obige Integral (53.) die Gleichung

$$(v-w)^{\tau-\gamma-1}(u-v)^{\sigma-\beta-1} = (-1)^{\sigma+\tau-\beta-\gamma}(w-v)^{\tau-\gamma-1}(v-u)^{\sigma-\beta-1}$$

benutzt, gelangt man zu der Formel

$$(57.)\quad \begin{cases} \int_1^\infty (w-x)^{-\delta}w^{\delta-\tau}dw\int_1^w (w-v)^{\tau-\gamma-1}v^{\gamma-\sigma}dv\int_1^v (v-u)^{\sigma-\beta-1}u^{\beta-\varrho}(u-1)^{\varrho-\alpha-1}du \\ = E(\alpha,\ \varrho-\alpha)E(\beta,\ \sigma-\beta)E(\gamma,\ \tau-\gamma)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \varrho,\ \sigma,\ \tau;\ x), \end{cases}$$

in welcher

$$(58.)\quad \begin{cases} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \varrho,\ \sigma,\ \tau;\ x) \\ = 1+\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{1.\varrho\sigma\tau}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}{1.2.\varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)}x^2+\cdots \\ \cdots+\frac{[\alpha]_\nu^+[\beta]_\nu^+[\gamma]_\nu^+[\delta]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho]_\nu^+[\sigma]_\nu^+[\tau]_\nu^+}x^\nu+\cdots \end{cases}$$

gesetzt ist.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (s. die Einleitung)

$$\int_0^1 w^{\gamma-1}(1-w)^{\tau-\gamma-1}dw\int_0^1 v^{\beta-1}(1-v)^{\sigma-\beta-1}dv\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}(1-uvwx)^{-\delta}du$$
$$= E(\alpha,\ \varrho-\alpha)E(\beta,\ \sigma-\beta)E(\gamma,\ \tau-\gamma)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ \varrho,\ \sigma,\ \tau;\ x)$$

und der Formel (19.) findet man, dass die übrigen drei Integrale (53.) sich durch die respectiven Substitutionen

$$u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}},\quad v = \frac{1}{1-\mathfrak{v}},\quad w = x\mathfrak{w},$$
$$u = \frac{1}{1-\mathfrak{u}},\quad v = x\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad w = x\mathfrak{w},$$
$$u = x\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad v = x\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad w = x\mathfrak{w}$$

in die Ausdrücke

$$\text{Const. } x^{1-\tau}F(\alpha-\tau+1,\ \beta-\tau+1,\ \gamma-\tau+1,\ \delta-\tau+1;\ 2-\tau,\ \varrho-\tau+1,\ \sigma-\tau+1;\ x),$$
$$\text{Const. } x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1,\ \beta-\sigma+1,\ \gamma-\sigma+1,\ \delta-\sigma+1;\ 2-\sigma,\ \varrho-\sigma+1,\ \tau-\sigma+1;\ x),$$
$$\text{Const. } x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1,\ \beta-\varrho+1,\ \gamma-\varrho+1,\ \delta-\varrho+1;\ 2-\varrho,\ \sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ x)$$

verwandeln. Auf die vier Integrale (54.) werden beziehungsweise die Substitutionen

$$u = 1-\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad v = 1-\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad w = 1-\mathfrak{w},$$

$$u = 1-\mathfrak{u}\mathfrak{v},\quad v = 1-\mathfrak{v},\quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}},$$

$$u = 1-\mathfrak{u},\quad v = \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}},\quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}},$$

$$u = \frac{x}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}},\quad v = \frac{x}{\mathfrak{v}\mathfrak{w}},\quad w = \frac{x}{\mathfrak{w}}$$

angewendet, durch welche sie in die Reihen

$$\text{Const.}\, x^{-\delta} F\Big(\delta,\, \delta-\varrho+1,\, \delta-\sigma+1,\, \delta-\tau+1;\, \delta-\alpha+1,\, \delta-\beta+1,\, \delta-\gamma+1;\, \frac{1}{x}\Big),$$

$$\text{Const.}\, x^{-\gamma} F\Big(\gamma,\, \gamma-\varrho+1,\, \gamma-\sigma+1,\, \gamma-\tau+1;\, \gamma-\alpha+1,\, \gamma-\beta+1,\, \gamma-\delta+1;\, \frac{1}{x}\Big),$$

$$\text{Const.}\, x^{-\beta} F\Big(\beta,\, \beta-\varrho+1,\, \beta-\sigma+1,\, \beta-\tau+1;\, \beta-\alpha+1,\, \beta-\gamma+1,\, \beta-\delta+1;\, \frac{1}{x}\Big),$$

$$\text{Const.}\, x^{-\alpha} F\Big(\alpha,\, \alpha-\varrho+1,\, \alpha-\sigma+1,\, \alpha-\tau+1;\, \alpha-\beta+1,\, \alpha-\gamma+1,\, \alpha-\delta+1;\, \frac{1}{x}\Big)$$

übergehen.

Aus dem Integral (55.) entsteht, wenn man

$$u-1 = (x-1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad v-1 = (x-1)\mathfrak{v}\mathfrak{w},\quad w-1 = (x-1)\mathfrak{w}$$

setzt und die Formel (18.) anwendet, eine Reihe von der Form:

$$\text{Const.}\, (x-1)^{\varrho+\sigma+\tau-\alpha-\beta-\gamma-\delta}\{1+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+\cdots\}.$$

Auf die Integrale (56.) übertragen sich die Schlussfolgerungen, welche sich im § 4 für die Integrale (26.), resp. (32.) ergaben. In Betreff der Substitutionen, durch welche man in die verschiedenen Integrale (56.) neue Variable einführt, wird auf § 13 verwiesen.

Auf die Differentialgleichung (44.) können, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, die Gleichungen von der Form

$$x^3(x-1)\frac{d^4y}{dx^4}+x^2(a_1x-b_1)\frac{d^3y}{dx^3}+x(a_2x-b_2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_3x-b_3)\frac{dy}{dx}+a_4y = 0$$

reducirt werden. Denn an Stelle der sieben Constanten $a_1, \dots a_4$, $b_1, \dots b_3$ lassen sich nach Auflösung zweier algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades die in (44.) enthaltenen sieben Constanten $\alpha, \beta, \dots \tau$ einführen.

Im Folgenden soll die Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(59.)\quad \left\{\begin{array}{c} x^{n-1}(x-1)\dfrac{d^ny}{dx^n}+x^{n-2}(a_1x-b_1)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+x^{n-3}(a_2x-b_2)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ \cdots+x(a_{n-2}x-b_{n-2})\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a_{n-1}x-b_{n-1})\dfrac{dy}{dx}+a_ny \end{array}\right\} = 0$$

in ähnlicher Weise wie die speciellen Gleichungen für $n = 2, 3, 4$ behandelt werden. Die $2n-1$ Constanten $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_{n-1}$ sind durch algebraische Gleichungen mit $2n-1$ anderen Constanten $\alpha_1, \dots \alpha_n, \varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ verbunden, von denen die Parameter der hypergeometrischen Reihen $n$ter Ordnung, welche der Gleichung (59.) genügen, linear abhängen. Die letzteren Reihen sind nach Hinzufügung je eines constanten Factors identisch mit $(n-1)$-fachen Integralen, die analog zu (16.) und (47.) gebildet sind. In den Beziehungen der verschiedenen, bei diesen Rechnungen vorkommenden Constanten zu einander treten gewisse ganzzahlige Coefficienten auf, die durch eine bekannte Formel der Theorie der analytischen Facultäten definirt werden, und die hier durch den Buchstaben d mit oberem und unterem Index bezeichnet werden sollen. Um die Differentialgleichung (59.) auf eine Gleichung von derselben Art und von der Ordnung $n-1$ zu reduciren (wie im Vorhergehenden die Gleichung (14.) auf (12.), und die Gleichung (44.) auf (43.) zurückkam), hat man lineare Functionen $Q_1, Q_2, \dots$ zu behandeln, die für $n = 4$ in (45.) angegeben wurden, und in deren Coefficienten jene ganzzahligen Constanten $d_m^{(p)}$ enthalten sind. Zur Durchführung der Rechnung werden mehrere Formeln, die für die Grössen $d_m^{(p)}$ gelten, benutzt; diese sollen zunächst abgeleitet werden.

§ 8.

Nach (37.) wird, wenn z eine beliebige Grösse und m eine positive ganze Zahl ist, durch $[z]_m$ die ganze Function $m$ten Grades von z

$$[z]_m = z(z-1)(z-2)\dots(z-m+1)$$

bezeichnet, ferner durch $[z]_0$ der Werth Eins. Ist nun p eine positive ganze Zahl, so lassen sich, nach einem bekannten algebraischen Satze $p+1$ Coefficienten

$$d_0^{(p)},\quad d_1^{(p)},\quad \dots\quad d_{p-1}^{(p)},\quad d_p^{(p)}$$

derartig bestimmen, dass die Gleichung

$$(60.)\qquad z^p = d_0^{(p)}+d_1^{(p)}[z-1]_1+d_2^{(p)}[z-1]_2+\cdots+d_m^{(p)}[z-1]_m+\cdots+d_p^{(p)}[z-1]_p$$

für jeden Werth von z erfüllt ist. Man findet sofort die speciellen Werthe

$$(61.)\qquad d_0^{(p)}=1,\quad d_1^{(p)}=2^p-1,\quad d_p^{(p)}=1,\quad d_{p-1}^{(p)}=\frac{p(p+1)}{2},$$

die sich ergeben, wenn man $z=1$ und $z=2$ nimmt, resp. die Factoren von z^p und z^{p-1} in (60.) betrachtet. Allgemein besteht für $m \leqq p$ die Gleichung

$$(62.)\qquad \begin{cases} d_m^{(p)} = \dfrac{1}{[m]_m}\left\{\begin{matrix}(m+1)^p-(m)_1 m^p+(m)_2(m-1)^p-(m_3)(m-2)^p+\cdots \\ \cdots+(-1)^{m-1}(m)_{m-1}2^p+(-1)^m 1^p\end{matrix}\right\} \\ \quad = \dfrac{1}{[m]_m}\sum\limits_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m)_i(m-i+1)^p = \dfrac{1}{[m]_m}\sum\limits_{i=0}^{i=m}(-1)^{m-i}(m)_i(i+1)^p, \end{cases}$$

wo $(m)_i$ den Binomialcoefficienten $\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i}$ bedeutet. Die Formel (62.) beweist man nach *Clausen* *), indem man in der Gleichung (60.) die Grösse z successiv gleich 1, 2, ... $m+1$ setzt und die hierdurch entstehenden Gleichungen addirt, nachdem man sie respective mit den Constanten

$$(-1)^m,\quad (-1)^{m-1}(m)_1,\quad (-1)^{m-2}(m)_2,\quad \ldots\quad -(m)_{m-1},\quad (m)_m$$

multiplicirt hat. Dann werden die Factoren von $d_0^{(p)}$, $d_1^{(p)}$, ... $d_{m-1}^{(p)}$ gleich Null wegen der Formel

$$1-(k)_1+(k)_2-(k)_3+\cdots+(-1)^k(k)_k = 0;$$

und da der Factor von $d_m^{(p)}$ den Werth $1.2.3\ldots m$, $=[m]_m$, annimmt, und die Grössen $d_{m+1}^{(p)}$, ... $d_p^{(p)}$ in den erwähnten $m+1$ Gleichungen überhaupt nicht vorkommen, so gelangt man direct zur Formel (62.).

Es besteht sodann die Relation:

$$(63.)\qquad d_m^{(p+1)} = (m+1)d_m^{(p)}+d_{m-1}^{(p)}.$$

Denn die rechts stehenden Summanden haben nach (62.) die Werthe

$$(m+1)d_m^{(p)} = \frac{1}{[m]_m}\left\{(m+1)^{p+1}+\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^i(m+1)(m)_i(m-i+1)^p\right\},$$

$$d_{m-1}^{(p)} = \frac{1}{[m-1]_{m-1}}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k(m-1)_k(m-k)^p,$$

sodass, wenn man in der letzteren Summe

$$k=i-1,\quad [m-1]_{m-1}=\frac{1}{m}[m]_m$$

---

*) *Clausen*, „Beweise der ersten Sätze der Theorie der numerischen Facultäten", dieses Journal, Bd. 7, pag. 234.

setzt, die Gleichung

$$(m+1)d_m^{(p)}+d_{m-1}^{(p)}$$
$$= \frac{1}{[m]_m}\left\{(m+1)^{p+1}+\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^i[(m+1)(m)_i-m(m-1)_{i-1}](m-i+1)^p\right\}$$

erhalten wird. Aber da

$$(m+1)(m)_i-m(m-1)_{i-1} = \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i}(m+1-i) = (m)_i(m-i+1)$$

ist, so ergiebt sich, wie behauptet wurde, die Formel:

$$(m+1)d_m^{(p)}+d_{m-1}^{(p)} = \frac{1}{[m]_m}\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m)_i(m-i+1)^{p+1} = d_m^{(p+1)}.$$

Bei den Coefficienten $d_m^{(p)}$ ist, da sie durch die Gleichung (60.) bestimmt wurden, der untere Index m kleiner als der obere Index p oder ihm gleich. Es soll nun, unter der Voraussetzung, dass m und p positive ganze Zahlen oder gleich Null sind, die Definition der Grössen $d_m^{(p)}$ auch auf den Fall, dass $m > p$ ist, ausgedehnt werden. Man definirt die Grössen $d_m^{(p)}$ für $m > p$ durch die Gleichung (62.). Der obige Beweis der Relation (63.), welcher nicht $m \leqq p$ voraussetzte, gründete sich ausschliesslich auf die Gleichung (62.). Daher gilt die Formel (63.) auch für diejenigen Ausdrücke (62.), bei denen der untere Index grösser als der obere ist. Aus (63.) folgt aber:

$$(64.)\qquad d_m^{(p)} = 0 \quad \text{für} \quad m > p.$$

Denn für $m = p+1$ lautet die Gleichung (63.)

$$d_{p+1}^{(p+1)} = (p+2)d_{p+1}^{(p)}+d_p^{(p)},$$

und da die Zahl $p+2$ von Null verschieden, und die Grössen $d_p^{(p)}$ und $d_{p+1}^{(p+1)}$ nach (61.) gleich Eins sind, so ergiebt sich allgemein $d_{p+1}^{(p)} = 0$. Analog schliesst man für $m = p+2$, $p+3$ etc. Ist für ein bestimmtes positives i und ein beliebiges p die Grösse $d_{p+i}^{(p)}$ gleich Null, mithin auch $d_{p+i+1}^{(p+1)} = 0$, so folgt, wenn $m = p+i+1$ gesetzt wird, aus der Gleichung (63.)

$$d_{p+i+1}^{(p+1)} = (p+i+2)d_{p+i+1}^{(p)}+d_{p+i}^{(p)},$$

dass auch $d_{p+i+1}^{(p)}$ für ein beliebiges p verschwindet. Daher ist $d_m^{(p)} = 0$, sobald m eine grössere positive ganze Zahl als p bezeichnet. — Man kann wegen der Formel (64.) die Gleichung (60.) als eine von selbst abbrechende Reihenentwickelung der Potenz z^p auffassen.

Die Formel (63.) beweist, dass die Coefficienten $d_m^{(p)}$ ganze Zahlen

sind. Denn wenn man dem Index p nach einander die Werthe 1, 2, 3, ... giebt, so ist jeder Coefficient $d_m^{(p)}$ durch die Coefficienten mit kleinerem oberen Index ausdrückbar, ohne dass hierbei Nenner auftreten. Gleichzeitig kann man die Formel (63.) für die numerische Berechnung der Coefficienten $d_m^{(p)}$ mit Vortheil benutzen. Die Tafel der Coefficienten $d_m^{(p)}$ beginnt, wenn man die oberen Indices den horizontalen, die unteren den verticalen Reihen entsprechen lässt, in folgender Weise:

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
$p=0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$p=1$	1	1	0	0	0	0	0	0
$p=2$	1	3	1	0	0	0	0	0
$p=3$	1	7	6	1	0	0	0	0
$p=4$	1	15	25	10	1	0	0	0
$p=5$	1	31	90	65	15	1	0	0
$p=6$	1	63	301	350	140	21	1	0
$p=7$	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Mit Hülfe der Gleichung (63.) geht man von einer beliebigen Horizontalreihe zur nächstfolgenden über. — Gewisse der Coefficienten $d_m^{(p)}$ lassen sich in kürzerer Weise als durch (62.) ausdrücken; ausser den bereits in (61.) erwähnten Werthen ist z. B.

$$d_{p-2}^{(p)} = (p+1)_3 \frac{3p-2}{4}, \quad d_{p-3}^{(p)} = (p+1)_4 \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Bei der Ableitung einiger weiterer Formeln für die Coefficienten $d_m^{(p)}$ kommt ein einfacher Satz über Doppelsummen wiederholt zur Anwendung. Hängt eine Grösse $f(k, l)$ von zwei Summationsindices k, l ab, so besteht die Gleichung:

$$(65.) \qquad \sum_{k=r}^{k=s} \sum_{l=k}^{l=s} f(k, l) = \sum_{l=r}^{l=s} \sum_{k=r}^{k=l} f(k, l).$$

Denn sowohl k als l nehmen im Ganzen die Werthe r, $r+1$, ... s an, und es ist $l \geqq k$. Statt also jedesmal mit einem Werthe von k alle Werthe von l zu verbinden, welche grösser als derselbe oder ihm gleich sind, kann man mit einem bestimmten Werthe von l alle Werthe von k, welche kleiner als dieser oder ihm gleich sind, combiniren. — Sind die Grenzen der zwei Summationen von einander unabhängig, so lässt sich die Summationsfolge ohne Weiteres umkehren, d. h. es ist:

$$(66.)\qquad \sum_{k=p}^{k=q}\sum_{l=r}^{l=s} f(k,\,l) = \sum_{l=r}^{l=s}\sum_{k=p}^{k=q} f(k,\,l).$$

Ferner möge an den Satz aus der Theorie der Binomialcoefficienten

$$(67.)\qquad (q)_r+(q)_{r-1} = (q+1)_r$$

erinnert werden.

Durch die Gleichung (63.) wird der Coefficient $d_m^{(p+1)}$ auf $d_m^{(p)}$ und $d_{m-1}^{(p)}$ zurückgeführt. Man kann in ähnlicher Weise die Grösse $d_{m+1}^{(p+1)}$ durch $d_m^{(p)}$, $d_m^{(p-1)}$, $d_m^{(p-2)}$, ... ausdrücken. Es besteht nämlich für $p \geqq m$ die Gleichung:

$$(68.)\qquad \begin{cases} d_{m+1}^{(p+1)} = d_m^{(p)}+(p+1)_1 d_m^{(p-1)}+(p+1)_2 d_m^{(p-2)}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(p+1)_{p-m-1}d_m^{(m+1)}+(p+1)_{p-m}d_m^{(m)} \\ \qquad = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} = \sum\limits_{\mu=m}^{\mu=p}(p+1)_{p-\mu}d_m^{(\mu)}. \end{cases}$$

Um dieselbe zu beweisen, transformirt man die rechts stehende Summe zunächst in der Art, dass man die analogen (zu $\nu=p-m+1,\ \ldots\ p$ gehörigen) Terme

$$(p+1)_{p-m+1}d_m^{(m-1)}+\cdots+(p+1)_p d_m^{(0)},$$

welche nach (64.) identisch Null sind, hinzufügt; sodann werde, nachdem $\nu=p-k$ gesetzt ist, die Gleichung (62.) angewendet, und in der entstehenden Doppelsumme die Summationsfolge nach (66.) geändert. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} &= \sum_{\nu=0}^{\nu=p}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} = \sum_{k=0}^{k=p}(p+1)_{p-k}d_m^{(k)} \\ &= \frac{1}{[m]_m}\sum_{k=0}^{k=p}(p+1)_{p-k}\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m)_i(m-i+1)^k \\ &= \frac{1}{[m]_m}\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m)_i\sum_{k=0}^{k=p}(p+1)_{p-k}(m-i+1)^k.\end{aligned}$$

Den Binomialcoefficienten $(p+1)_{p-k}$ schreibe man $(p+1)_{k+1}$. Ferner ist

$$\frac{(m)_i}{[m]_m} = (m+1)\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots(m+1).1.2\ldots i} = \frac{1}{[m+1]_{m+1}}(m+1)_i(m-i+1),$$

sodass die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} = \frac{1}{[m+1]_{m+1}}\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m+1)_i\sum_{k=0}^{k=p}(p+1)_{k+1}(m-i+1)^{k+1}$$

entsteht. Aber der binomische Satz

$$(1+M)^{p+1} = 1+(p+1)_1 M+(p+1)_2 M^2+\cdots+(p+1)_{p+1}M^{p+1}$$

ergiebt für $M = m-i+1$:

$$\sum_{k=0}^{k=p}(p+1)_{k+1}(m-i+1)^{k+1} = (m-i+2)^{p+1}-1.$$

Also ist:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} = \frac{1}{[m+1]_{m+1}}\left\{\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m+1)_i(m-i+2)^{p+1}-\sum_{i=0}^{i=m}(-1)^i(m+1)_i\right\}.$$

In der ersten der rechts stehenden Summen würde zu $i = m+1$ der Term $(-1)^{m+1}$ gehören, und dieser wird gerade durch die zweite Summe geliefert, da

$$1-(m+1)_1+(m+1)_2-\cdots+(-1)^m(m+1)_m = -(-1)^{m+1}$$

ist. Hierdurch gelangt man zu der erwähnten Formel:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_\nu d_m^{(p-\nu)} = \frac{1}{[m+1]_{m+1}}\sum_{i=0}^{i=m+1}(-1)^i(m+1)_i(m-i+2)^{p+1} = d_{m+1}^{(p+1)}.$$

Schafft man in (68.) den ersten Summandus der rechten Seite nach links, so entsteht, nach Berücksichtigung von (63.) und nachdem p durch $p+1$ ersetzt ist, die weitere Formel:

$$(69.)\quad \begin{cases}(m+2)d_{m+1}^{(p+1)} = (p+2)_1 d_m^{(p)}+(p+2)_2 d_m^{(p-1)}+\cdots+(p+2)_{p-m+1}d_m^{(m)} \\ \qquad = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+2)_{\nu+1}d_m^{(p-\nu)}.\end{cases}$$

Subtrahirt man ferner die Gleichung (68.) von (69.) und setzt nach (67.)

$$(p+1)_{\nu+1} \quad \text{für} \quad (p+2)_{\nu+1}-(p+1)_\nu,$$

so hat man die Gleichung

$$(70.)\quad \begin{cases}(m+1)d_{m+1}^{(p+1)} = (p+1)_1 d_m^{(p)}+(p+1)_2 d_m^{(p-1)}+\cdots+(p+1)_{p-m+1}d_m^{(m)} \\ \qquad = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+1)_{\nu+1}d_m^{(p-\nu)}.\end{cases}$$

Die Formeln (68.), (69.), (70.) gestatten eine erhebliche Verallgemeinerung, indem ähnliche Ausdrücke, wie sie hier für $d_{m+1}^{(p+1)}$ gefunden wurden, für den Werth $d_{m+s}^{(p+s)}$ gelten, während s eine beliebige positive ganze Zahl ist. Die neuen Gleichungen, für welche ein Inductionsbeweis gegeben werden wird, unterscheiden sich von den obigen hauptsächlich dadurch, dass die Summanden der rechten Seiten je zwei der Grössen d als Factoren enthalten. Es soll mit derjenigen Formel begonnen werden, welche für $s = 1$ in die Gleichung (70.) übergeht. Dieselbe lautet:

$$(71.)\quad \begin{cases} (m+s)_s d_{m+s}^{(p+s)} = (p+s)_s d_m^{(p)} d_{s-1}^{(s-1)} + (p+s)_{s+1} d_m^{(p-1)} d_{s-1}^{(s)} + (p+s)_{s+2} d_m^{(p-2)} d_{s-1}^{(s+1)} + \cdots \\ \qquad \cdots + (p+s)_{p-m+s-1} d_m^{(m+1)} d_{s-1}^{(p-m+s-2)} + (p+s)_{p-m+s} d_m^{(m)} d_{s-1}^{(p-m+s-1)} \\ \qquad = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-m} (p+s)_{s+\nu} d_m^{(p-\nu)} d_{s-1}^{(s+\nu-1)}. \end{cases}$$

Man nimmt auch hier $p \geqq m$ an, da für $p < m$ beide Seiten der Gleichung identisch Null sein würden. Für $s = 1$ sind nach (61.) die Coefficienten $d_{s-1}^{(s+\nu-1)}$ gleich Eins. — Man setzt die Gleichung (71.), während m und p beliebig bleiben, für einen bestimmten Werth $s = q$ als gültig voraus und zeigt, dass dieselbe dann auch für $s = q+1$ in Kraft ist. Hierdurch ist der allgemeine Beweis der Gleichung erbracht, da sie für $s = 1$ gleichlautend mit (70.) wird.

Wenn in (70.) die Zahlen m und p durch $m+q$ und $p+q$ ersetzt werden, so ergiebt sich:

$$(m+q+1) d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \sum_{k=0}^{k=p-m} (p+q+1)_{k+1} d_{m+q}^{(p-k+q)}.$$

Nachdem diese Gleichung mit $\frac{1}{q+1}(m+q)_q$ multiplicirt ist, wendet man die Gleichung (71.), welche für $s = q$ und für beliebige Werthe von m und p (also auch für den Fall, dass $p-k$ an Stelle von p steht) vorausgesetzt wird, auf die Grössen $d_{m+q}^{(p-k+q)}$ an, wodurch

$$(m+q)_q d_{m+q}^{(p-k+q)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-k-m} (p-k+q)_{q+\nu} d_m^{(p-k-\nu)} d_{q-1}^{(q+\nu-1)}$$

oder, wenn $\nu = l-k$, $k+\nu = l$ gesetzt wird,

$$(m+q)_q d_{m+q}^{(p-k+q)} = \sum_{l=k}^{l=p-m} (p-k+q)_{q+l-k} d_m^{(p-l)} d_{q-1}^{(q+l-k-1)}$$

erhalten wird. Die obige Gleichung lautet dann:

$$\frac{m+q+1}{q+1}(m+q)_q d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = (m+q+1)_{q+1} d_{m+q+1}^{(p+q+1)}$$

$$= \frac{1}{q+1} \sum_{k=0}^{k=p-m} (p+q+1)_{k+1} \sum_{l=k}^{l=p-m} (p-k+q)_{q+l-k} d_m^{(p-l)} d_{q-1}^{(q+l-k-1)}$$

oder nach Formel (65.)

$$(m+q+1)_{q+1} d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \frac{1}{q+1} \sum_{l=0}^{l=p-m} d_m^{(p-l)} \sum_{k=0}^{k=l} (p+q+1)_{k+1} (p-k+q)_{q+l-k} d_{q-1}^{(q+l-k-1)}.$$

Nun ist

$$(p+q+1)_{k+1}(p-k+q)_{q+l-k} = \frac{(p+q+1)(p+q)\ldots(p-k+q+1)}{1.2\ldots(k+1)} \frac{(p-k+q)\ldots(p-l+1)}{1.2\ldots(q+l-k)}$$

$$= (p+q+1)_{q+l+1} \frac{(q+l-k+1)(q+l-k+2)\ldots(q+l+1)}{1.2\ldots(k+1)} = (p+q+1)_{q+l+1}(q+l+1)_{k+1},$$

sodass die Gleichung

$$(m+q+1)_{q+1}d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \frac{1}{q+1}\sum_{l=0}^{l=p-m}(p+q+1)_{q+l+1}d_m^{(p-l)}\sum_{k=0}^{k=l}(q+l+1)_{k+1}d_{q-1}^{(q+l-k-1)}$$

entsteht. Aber die Formel (69.) lautet, wenn daselbst m durch $q-1$ und p durch $q+l-1$ ersetzt wird,

$$\sum_{k=0}^{k=l}(q+l+1)_{k+1}d_{q-1}^{(q+l-k-1)} = (q+1)d_q^{(q+l)};$$

also gelangt man zu der Gleichung

$$(m+q+1)_{q+1}d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \sum_{l=0}^{l=p-m}(p+q+1)_{q+l+1}d_m^{(p-l)}d_q^{(q+l)},$$

welche mit (71.) für $s = q+1$ identisch ist.

Dieselbe Methode soll für den Beweis der weiteren Formel

$$(72.)\quad \begin{cases} (m+s+1)_s d_{m+s}^{(p+s)} \\ = (p+s+1)_s d_m^{(p)}d_{s-1}^{(s-1)}+(p+s+1)_{s+1}d_m^{(p-1)}d_{s-1}^{(s)}+(p+s+1)_{s+2}d_m^{(p-2)}d_{s-1}^{(s+1)}+\cdots \\ \cdots+(p+s+1)_{s+p-m-1}d_m^{(m+1)}d_{s-1}^{(s+p-m-2)}+(p+s+1)_{s+p-m}d_m^{(m)}d_{s-1}^{(s+p-m-1)} \\ = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+s+1)_{s+\nu}d_m^{(p-\nu)}d_{s-1}^{(s+\nu-1)}, \end{cases}$$

die für $s = 1$ in (69.) übergeht, angewendet werden. Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (72.) für $s = q$ bestehe, weist man ihre Gültigkeit für $s = q+1$ nach. Die Gleichung (69.) lautet, wenn die Werthe $p+q$ und $m+q$ statt p und m geschrieben, und die Factoren $\frac{1}{q+1}(m+q+1)_q$ hinzugefügt werden,

$$\frac{m+q+2}{q+1}(m+q+1)_q d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = (m+q+2)_{q+1}d_{m+q+1}^{(p+q+1)}$$
$$= \frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{k=p-m}(p+q+2)_{k+1}(m+q+1)_q d_{m+q}^{(p-k+q)}.$$

Die für $s = q$ vorausgesetzte Gleichung (72.) liefert nun die Werthe:

$$(m+q+1)_q d_{m+q}^{(p-k+q)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-k-m}(p-k+q+1)_{q+\nu}d_m^{(p-k-\nu)}d_{q-1}^{(q+\nu-1)}$$
$$= \sum_{l=k}^{l=p-m}(p-k+q+1)_{q+l-k}d_m^{(p-l)}d_{q-1}^{(q+l-k-1)}.$$

Indem man dieselben substituirt und die Formel (65.) anwendet, findet man die Gleichung

$$(m+q+2)_{q+1}d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \frac{1}{q+1}\sum_{l=0}^{l=p-m}d_m^{(p-l)}\sum_{k=0}^{k=l}(p+q+2)_{k+1}(p-k+q+1)_{q+l-k}d_{q-1}^{(q+l-k-1)}$$

oder, da nach der oben ausgeführten Rechnung

$$(p+q+2)_{k+1}(p-k+q+1)_{q+l-k} = (p+q+2)_{q+l+1}(q+l+1)_{k+1}$$

und nach (69.)

$$\sum_{k=0}^{k=l}(q+l+1)_{k+1}d_{q-1}^{(q+l-k-1)} = (q+1)d_q^{(q+l)}$$

ist, die folgende

$$(m+q+2)_{q+1}d_{m+q+1}^{(p+q+1)} = \sum_{l=0}^{l=p-m}(p+q+2)_{q+l+1}d_m^{(p-l)}d_q^{(q+l)},$$

welche in der That mit der Gleichung (72.) für $s = q+1$ identisch ist. Letztere ist somit allgemein bewiesen.

Subtrahirt man die Gleichung (71.) von (72.) und setzt nach (67.)

$$(m+s+1)_s-(m+s)_s = (m+s)_{s-1}, \quad (p+s+1)_{s+\nu}-(p+s)_{s+\nu} = (p+s)_{s+\nu-1},$$

so erhält man die Formel

$$(73.) \qquad (m+s)_{s-1}d_{m+s}^{(p+s)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-m}(p+s)_{s+\nu-1}d_m^{(p-\nu)}d_{s-1}^{(s+\nu-1)},$$

in welcher, wie in (71.) und (72.), die positiven ganzen Zahlen m, p, s bis auf die Bedingung $p \geqq m$ beliebig sind. Für $s = 1$ geht die Gleichung (73.) in (68.) über.

Mit Hülfe der Formeln (71.) und (72.) kann man gewisse Identitäten ableiten, in denen ganze Functionen von z durch die Producte $[z-1]_\nu$ oder $[z]_\nu$ dargestellt werden, und die in den nachstehenden Rechnungen Anwendung finden. Aus (71.) entsteht, wenn man r statt $p+s$ und l statt $\nu+s$ schreibt, die Gleichung

$$(m+s)_s d_{m+s}^{(r)} = \sum_{l=s}^{l=r-m}(r)_l d_m^{(r-l)}d_{s-1}^{(l-1)}.$$

Man füge auf beiden Seiten den Factor $[z-1]_{s-1}$ hinzu, summire nach s von $s = 1$ bis $s = r-m$ und wende die Formel (65.) an. Dann ergiebt sich

$$\sum_{s=1}^{s=r-m}(m+s)_s d_{m+s}^{(r)}[z-1]_{s-1} = \sum_{l=1}^{l=r-m}(r)_l d_m^{(r-l)}\sum_{s=1}^{s=l}d_{s-1}^{(l-1)}[z-1]_{s-1}$$

oder, da nach (60.)

$$z^{l-1} = \sum_{s=1}^{s=l}d_{s-1}^{(l-1)}[z-1]_{s-1}$$

ist,

$$(74.) \qquad \sum_{s=1}^{s=r-m}(m+s)_s d_{m+s}^{(r)}[z-1]_{s-1} = \sum_{l=1}^{l=r-m}(r)_l d_m^{(r-l)}z^{l-1}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit z und berücksichtige, dass

$$z[z-1]_{s-1} = z(z-1)\dots(z-s+1) = [z]_s$$

ist; ferner addire man links und rechts den Term $d_m^{(r)}$. Hierdurch gelangt man, wenn auch links der Buchstabe l für den Summationsindex angewendet wird, zu der Formel

$$(75.)\qquad \sum_{l=0}^{l=r-m}(m+l)_l d_{m+l}^{(r)}[z]_l = \sum_{l=0}^{l=r-m}(r)_l d_m^{(r-l)} z^l,$$

d. h.

$$d_m^{(r)}+(m+1)_1 d_{m+1}^{(r)}[z]_1+(m+2)_2 d_{m+2}^{(r)}[z]_2+\dots+(r-1)_{r-m-1}d_{r-1}^{(r)}[z]_{r-m-1}+(r)_{r-m}d_r^{(r)}[z]_{r-m}$$
$$= d_m^{(r)}+(r)_1 d_m^{(r-1)}z+(r)_2 d_m^{(r-2)}z^2+\dots+(r)_{r-m-1}d_m^{(m+1)}z^{r-m-1}+(r)_{r-m}d_m^{(m)}z^{r-m}.$$

In analoger Weise gebe man der Gleichung (72.), welche für

$$p+s = r,\quad \nu+s = l$$

die Form

$$(m+s+1)_s d_{m+s}^{(r)} = \sum_{l=s}^{l=r-m}(r+1)_l d_m^{(r-l)} d_{s-1}^{(l-1)}$$

annimmt, den Factor $[z-1]_{s-1}$ und summire nach s von $s=1$ bis $s=r-m$. Nach Anwendung der Formel (65.) erhält man die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=r-m}(m+s+1)_s d_{m+s}^{(r)}[z-1]_{s-1} = \sum_{l=1}^{l=r-m}(r+1)_l d_m^{(r-l)}\sum_{s=1}^{s=l} d_{s-1}^{(l-1)}[z-1]_{s-1},$$

welche (wegen (60.)) in

$$(76.)\qquad \sum_{s=1}^{s=r-m}(m+s+1)_s d_{m+s}^{(r)}[z-1]_{s-1} = \sum_{l=1}^{l=r-m}(r+1)_l d_m^{(r-l)} z^{l-1}$$

übergeht. Indem man mit z multiplicirt und auf beiden Seiten den Term $d_m^{(r)}$ addirt, ergiebt sich die Formel:

$$(77.)\qquad \sum_{l=0}^{l=r-m}(m+l+1)_l d_{m+l}^{(r)}[z]_l = \sum_{l=0}^{l=r-m}(r+1)_l d_m^{(r-l)} z^l.$$

Endlich werde die Gleichung (74.) von (76.) subtrahirt, und nach (67.)

$$(m+s+1)_s-(m+s)_s = (m+s)_{s-1},\quad (r+1)_l-(r)_l = (r)_{l-1}$$

substituirt; dann findet man (nach Ersetzung des Buchstabens s durch l) die Formel:

$$(78.)\qquad \sum_{l=1}^{l=r-m}(m+l)_{l-1} d_{m+l}^{(r)}[z-1]_{l-1} = \sum_{l=1}^{l=r-m}(r)_{l-1} d_m^{(r-l)} z^{l-1}.$$

Auch bei den Gleichungen (74.) bis (78.) kann man die linken und die rechten Seiten als Reihen auffassen, welche in Folge der Formel (64.) von selbst abbrechen. Die Zahl r ist nach der Voraussetzung grösser als m.

Ausser den Sätzen über die Coefficienten $d_m^{(p)}$ wird in den folgenden Paragraphen noch eine einfache Formel aus der Combinationslehre benutzt, deren Beweis hier kurz angegeben werden soll.

Die Summen der Combinationen der m beliebigen Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ zu je 1, 2, ... m mögen respective durch $L_1, L_2, \dots L_m$ bezeichnet werden, sodass

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_m, \\ L_2 &= \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\cdots+\lambda_1\lambda_m+\lambda_2\lambda_3+\cdots+\lambda_{m-1}\lambda_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_m &= \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m \end{aligned}$$

ist. Man nenne ferner $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ die Ausdrücke

$$\varkappa_1 = \lambda_1+k, \quad \varkappa_2 = \lambda_2+k, \quad \dots \quad \varkappa_m = \lambda_m+k,$$

während k ein beliebiger Werth ist. Die Summe der Combinationen der m Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m$ zu je ν heisse K_ν; also

$$K_\nu = \varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_{\nu-1}\varkappa_\nu+\varkappa_1\varkappa_2\dots\varkappa_{\nu-1}\varkappa_{\nu+1}+\cdots.$$

Dann besteht für K_ν die Gleichung

$$(79.)\quad \begin{cases} K_\nu = L_\nu+(m-\nu+1)_1 kL_{\nu-1}+(m-\nu+2)_2 k^2 L_{\nu-2}+\cdots \\ \qquad \cdots+(m-2)_{\nu-2}k^{\nu-2}L_2+(m-1)_{\nu-1}k^{\nu-1}L_1+(m)_\nu k^\nu, \end{cases}$$

in welcher $(m-\nu+1)_1, (m-\nu+2)_2, \dots$ Binomialcoefficienten bedeuten.

Der Beweis der Formel (79.) ergiebt sich aus der Betrachtung der ganzen Function $m$ten Grades einer Variablen η:

$$(\eta-\lambda_1)(\eta-\lambda_2)\dots(\eta-\lambda_m) = \eta^m-L_1\eta^{m-1}+L_2\eta^{m-2}-L_3\eta^{m-3}+\cdots+(-1)^m L_m.$$

Wird mittelst der Substitution $\eta = \xi-k$ die Variable ξ eingeführt, so entsteht die identische Gleichung

$$\begin{aligned} &(\xi-\varkappa_1)(\xi-\varkappa_2)\dots(\xi-\varkappa_m) \\ &= \xi^m-K_1\xi^{m-1}+\cdots+(-1)^\nu K_\nu\xi^{m-\nu}+\cdots+(-1)^m K_m \\ &= (\xi-k)^m-L_1(\xi-k)^{m-1}+L_2(\xi-k)^{m-2}-\cdots+(-1)^m L_m, \end{aligned}$$

in welcher man die Potenzen von $\xi-k$ nach dem binomischen Satze entwickelt. Indem die Coefficienten der Potenz $\xi^{m-\nu}$ auf der linken und der rechten Seite verglichen werden, gelangt man unmittelbar zur Formel (79.).

§ 9.

Es soll die Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(80.)\quad \left\{\begin{array}{r} x^{n-1}Q_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n}+x^{n-2}Q_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+x^{n-3}Q_{n-2}(x)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ \cdots+xQ_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q_1(x)\dfrac{dy}{dx}+Q_0 y \end{array}\right\} = 0$$

betrachtet werden, in welcher $Q_n(x), \dots Q_1(x)$ die linearen Functionen von x

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= x-1, \quad Q_{n-1}(x) = [A_1+d_{n-2}^{(n-1)}]x-[R_1+d_{n-3}^{(n-2)}],\\
Q_{n-2}(x) &= [A_2+d_{n-3}^{(n-2)}A_1+d_{n-3}^{(n-1)}]x-[R_2+d_{n-4}^{(n-3)}R_1+d_{n-4}^{(n-2)}],\\
Q_{n-3}(x) &= [A_3+d_{n-4}^{(n-3)}A_2+d_{n-4}^{(n-2)}A_1+d_{n-4}^{(n-1)}]x-[R_3+d_{n-5}^{(n-4)}R_2+d_{n-5}^{(n-3)}R_1+d_{n-5}^{(n-2)}],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_2(x) &= [A_{n-2}+d_1^{(2)}A_{n-3}+d_1^{(3)}A_{n-4}+\cdots+d_1^{(n-2)}A_1+d_1^{(n-1)}]x\\
&\qquad -[R_{n-2}+d_0^{(1)}R_{n-3}+d_0^{(2)}R_{n-4}+\cdots+d_0^{(n-3)}R_1+d_0^{(n-2)}],\\
Q_1(x) &= [A_{n-1}+d_0^{(1)}A_{n-2}+d_0^{(2)}A_{n-3}+\cdots+d_0^{(n-2)}A_1+d_0^{(n-1)}]x-R_{n-1},
\end{aligned}$$

und $Q_0, A_1, \dots A_{n-1}, R_1, \dots R_{n-1}$ Constante bedeuten. Die Grössen $d_m^{(p)}$ sind die in (62.) angegebenen positiven ganzen Zahlen. An Stelle von $A_1, A_2, \dots A_{n-1}, R_1, \dots R_{n-1}$ und von Q_0, wofür der Symmetrie halber A_n geschrieben werde, führt man $2n-1$ andere Constanten $\alpha_1, \dots \alpha_n$, $\varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ ein mittelst der Gleichungen:

$$(81.)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\\
A_2 &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n &= Q_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n,\\
R_1 &= \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_{n-1},\\
R_2 &= \varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\cdots+\varrho_1\varrho_{n-1}+\varrho_2\varrho_3+\cdots+\varrho_{n-2}\varrho_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_{n-1} &= \varrho_1\varrho_2\varrho_3\dots\varrho_{n-1}.
\end{aligned}\right.$$

Die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ unterwirft man der Beschränkung, dass für beliebige Werthe der Indices μ und ν keine der Grössen

$$\varrho_\nu,\quad \varrho_\mu-\varrho_\nu,\quad \alpha_\mu-\alpha_\nu,\quad \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-1}-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n$$

eine positive oder negative ganze Zahl oder Null sein soll. Abgesehen hiervon sind $A_1, \dots A_n, R_1, \dots R_{n-1}$ willkürlich, also $Q_{n-1}(x), \dots Q_1(x)$ beliebige lineare Functionen von x. Man kann, da $d_p^{(p)} = 1$ ist, die Definition von $Q_n(x), \dots Q_2(x)$ in die Gleichung

$$(82.)\qquad Q_\nu(x) = x\sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-1)} A_{n-i} - \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)} R_{n-i}$$

zusammenfassen, wenn unter A_0 und R_0 der Werth 1 verstanden wird. Für $\nu = 1$ ist in (82.) der nicht mit x multiplicirte Term durch $-R_{n-1}$ zu ersetzen.

Man kann die Beziehungen zwischen den in (82.) angegebenen Coefficienten von $Q_\nu(x)$ und den Constanten A_1, R_1, ..., resp. α_1, ϱ_1, ..., noch in anderer Weise ausdrücken. Aus der Gleichung (60.) entsteht, wenn man sie mit z multiplicirt, die Formel

$$z^{p+1} = d_0^{(p)}[z]_1 + d_1^{(p)}[z]_2 + \cdots + d_{\nu-1}^{(p)}[z]_\nu + \cdots + d_p^{(p)}[z]_{p+1}$$

oder, wenn man $p-1$ statt p schreibt, die folgende:

$$z^p = d_0^{(p-1)}[z]_1 + d_1^{(p-1)}[z]_2 + \cdots + d_{\nu-1}^{(p-1)}[z]_\nu + \cdots + d_{p-1}^{(p-1)}[z]_p.$$

Also ist:

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots + A_{n-1} z = \sum_{p=1}^{p=n} A_{n-p} z^p =$$

$$[z]_1 \sum_{p=1}^{p=n} d_0^{(p-1)} A_{n-p} + [z]_2 \sum_{p=2}^{p=n} d_1^{(p-1)} A_{n-p} + \cdots + [z]_\nu \sum_{p=\nu}^{p=n} d_{\nu-1}^{(p-1)} A_{n-p} + \cdots + [z]_n d_{n-1}^{(n-1)} A_0.$$

Definirt man nun, indem man $A_0 = 1$ setzt und den Summandus A_n hinzufügt, $n+1$ Constanten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, ... $\mathfrak{a}_n$ durch die identische Gleichung

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots + A_{n-1} z + A_n =$$
$$\mathfrak{a}_n[z]_n + \mathfrak{a}_{n-1}[z]_{n-1} + \cdots + \mathfrak{a}_\nu[z]_\nu + \cdots + \mathfrak{a}_1[z]_1 + \mathfrak{a}_0,$$

so ist $\mathfrak{a}_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots n$ gleich dem Ausdruck

$$\mathfrak{a}_\nu = \sum_{p=\nu}^{p=n} d_{\nu-1}^{(p-1)} A_{n-p},$$

und $\mathfrak{a}_0$ gleich A_n. Ebenso sind, wenn man für ein beliebiges z die Gleichung

$$z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + R_2 z^{n-3} + \cdots + R_{n-2} z + R_{n-1} =$$
$$\mathfrak{r}_n[z]_{n-1} + \mathfrak{r}_{n-1}[z]_{n-2} + \cdots + \mathfrak{r}_\nu[z]_{\nu-1} + \cdots + \mathfrak{r}_2[z]_1 + \mathfrak{r}_1$$

aufstellt, die Constanten $\mathfrak{r}_n$, $\mathfrak{r}_{n-1}$, ... $\mathfrak{r}_2$ durch die Formel

$$\mathfrak{r}_\nu = \sum_{p=\nu-1}^{p=n-1} d_{\nu-2}^{(p-1)} R_{n-p-1} = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)} R_{n-i}$$

bestimmt, während $\mathfrak{r}_1$ den Werth R_{n-1} hat. Hieraus ergiebt sich (cfr. (82.)), dass für $\nu = 1, 2, \ldots n$

$$Q_\nu(x) = \mathfrak{a}_\nu x - \mathfrak{r}_\nu$$

und $\mathfrak{a}_0 = Q_0 = A_n$ ist. Führt man mit Hülfe der Relationen (81.) die Con-

stanten $\alpha_1, \varrho_1, \dots$ an Stelle von $A_1, R_1, \dots$ in die obigen Ausdrücke ein, so entstehen die Gleichungen

$$\begin{cases}(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\dots(z+\alpha_n) \;\;= \mathfrak{a}_n[z]_n \;\;+\mathfrak{a}_{n-1}[z]_{n-1}+\dots+\mathfrak{a}_1[z]_1+\mathfrak{a}_0,\\ (z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\dots(z+\varrho_{n-1}) = \mathfrak{r}_n[z]_{n-1}+\mathfrak{r}_{n-1}[z]_{n-2}+\dots+\mathfrak{r}_2[z]_1+\mathfrak{r}_1,\end{cases}$$

welche wiederum für einen beliebigen Werth von z gelten.

Auf die Gleichung (80.) wird ein Inductionsverfahren angewendet. Substituirt man für y das einfache bestimmte Integral

$$(83.)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_n} t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}-1}\,T\,dt,$$

in welchem T eine Function von t allein, g constant, und h entweder constant oder gleich x ist, so ergiebt sich für T eine lineare Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung, welche wieder die Form der Gleichung (80.) hat. Es seien $2n-3$ Constanten

$$A'_1,\quad A'_2,\quad \dots\quad A'_{n-1},\quad R'_1,\quad R'_2,\quad \dots\quad R'_{n-2}$$

mit $2n-3$ anderen Constanten $\alpha'_1, \dots \alpha'_{n-1}, \varrho'_1, \dots \varrho'_{n-2}$ durch die Gleichungen

$$(84.)\qquad \begin{cases} A'_1 \;\;= \alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3+\dots+\alpha'_{n-1},\\ A'_2 \;\;= \alpha'_1\alpha'_2+\alpha'_1\alpha'_3+\dots+\alpha'_1\alpha'_{n-1}+\alpha'_2\alpha'_3+\dots+\alpha'_{n-2}\alpha'_{n-1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A'_{n-1} = \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\dots\alpha'_{n-1},\\ R'_1 \;\;= \varrho'_1+\varrho'_2+\varrho'_3+\dots+\varrho'_{n-2},\\ R'_2 \;\;= \varrho'_1\varrho'_2+\varrho'_1\varrho'_3+\dots+\varrho'_1\varrho'_{n-2}+\varrho'_2\varrho'_3+\dots+\varrho'_{n-3}\varrho'_{n-2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ R'_{n-2} = \varrho'_1\varrho'_2\varrho'_3\dots\varrho'_{n-2}\end{cases}$$

verbunden. Ferner definire man $P_{n-1}(t), P_{n-2}(t), \dots P_1(t)$ als die linearen Functionen von t, welche aus den Grössen Q_ν erhalten werden, wenn man $n, x, A_1, R_1, \dots$ durch $n-1, t, A'_1, R'_1, \dots$ ersetzt; also es sei

$$P_{n-1}(t) = t-1,\quad P_{n-2}(t) = [A'_1+d_{n-3}^{(n-2)}]t-[R'_1+d_{n-4}^{(n-3)}],$$

$$P_{n-3}(t) = [A'_2+d_{n-4}^{(n-3)}A'_1+d_{n-4}^{(n-2)}]t-[R'_2+d_{n-5}^{(n-4)}R'_1+d_{n-5}^{(n-3)}],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_2(t) = [A'_{n-3}+d_1^{(2)}A'_{n-4}+\dots+d_1^{(n-3)}A'_1+d_1^{(n-2)}]t \\ -[R'_{n-3}+d_0^{(1)}R'_{n-4}+\dots+d_0^{(n-4)}R'_1+d_0^{(n-3)}],$$

$$P_1(t) = [A'_{n-2}+d_0^{(1)}A'_{n-3}+\dots+d_0^{(n-3)}A'_1+d_0^{(n-2)}]t-R'_{n-2},$$

ferner $P_0 = A'_{n-1}$. Dann genügt T der Differentialgleichung

$$(85.)\quad \left\{\begin{array}{l} t^{n-2}P_{n-1}(t)\dfrac{d^{n-1}T}{dt^{n-1}}+t^{n-3}P_{n-2}(t)\dfrac{d^{n-2}T}{dt^{n-2}}+t^{n-4}P_{n-3}(t)\dfrac{d^{n-3}T}{dt^{n-3}}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+tP_2(t)\dfrac{d^2T}{dt^2}+P_1(t)\dfrac{dT}{dt}+P_0T \end{array}\right\} = 0,$$

falls den Constanten $\alpha'_1, \dots \alpha'_{n-1}, \varrho'_1, \dots \varrho'_{n-2}$ die Werthe

$$(86.)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1-\varrho_{n-1}+1, & \alpha'_2 = \alpha_2-\varrho_{n-1}+1, \quad \dots \quad \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1}-\varrho_{n-1}+1, \\ \varrho'_1 = \varrho_1-\varrho_{n-1}+1, & \varrho'_2 = \varrho_2-\varrho_{n-1}+1, \quad \dots \quad \varrho'_{n-2} = \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1 \end{cases}$$

gegeben werden. — Schreibt man die oben definirten Functionen $P_{n-1}(t)$, $P_{n-2}(t), \dots P_1(t)$ kurz

$$P_\nu(t) = \beta_\nu t-\gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots n-1),$$

so ist

$$(87.)\quad \beta_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-1}^{(i-1)}A'_{n-i-1},\quad \gamma_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-2}^{(i-2)}R'_{n-i-1} \text{ für } \nu>1,\quad \gamma_1 = R'_{n-2},$$

wobei $A'_0 = R'_0 = 1$ zu nehmen ist. Die Constanten β_ν, γ_ν genügen den Identitäten

$$\begin{aligned} z^{n-1}+A'_1z^{n-2}+\cdots+A'_{n-2}z+A'_{n-1} &= (z+\alpha'_1)(z+\alpha'_2)\dots(z+\alpha'_{n-1}) \\ &= \beta_{n-1}[z]_{n-1}+\beta_{n-2}[z]_{n-2}+\cdots+\beta_1[z]_1+\beta_0, \\ z^{n-2}+R'_1z^{n-3}+\cdots+R'_{n-3}z+R'_{n-2} &= (z+\varrho'_1)(z+\varrho'_2)\dots(z+\varrho'_{n-2}) \\ &= \gamma_{n-1}[z]_{n-2}+\gamma_{n-2}[z]_{n-3}+\cdots+\gamma_2[z]_1+\gamma_1, \end{aligned}$$

wie aus der im Anschluss an die Gleichung (82.) angestellten Rechnung folgt.

Um den durch die Substitution (83.) vermittelten Zusammenhang der zwei Differentialgleichungen (80.) und (85.) nachzuweisen, giebt man, in Analogie zu § 2 und § 5, der Differentialgleichung für y nicht direct die in (80.) bezeichnete Form. Es werde vielmehr zunächst die allgemeinere Differentialgleichung

$$(88.)\quad \left\{\begin{array}{l} f_n(x)\dfrac{d^ny}{dx^n}+[(\alpha+n-1)_1f'_n(x)-f_{n-1}(x)]\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ \quad +[(\alpha+n-1)_2f''_n(x)-(\alpha+n-2)_1f'_{n-1}(x)+f_{n-2}(x)]\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots \\ \cdots+[(\alpha+n-1)_{n-\nu}f_n^{(n-\nu)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-\nu-1}f_{n-1}^{(n-\nu-1)}(x)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(-1)^{n-\nu-1}(\alpha+\nu)_1f'_{\nu+1}(x)+(-1)^{n-\nu}f_\nu(x)]\dfrac{d^\nu y}{dx^\nu}+\cdots \\ \cdots+[(\alpha+n-1)_{n-1}f_n^{(n-1)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-2}f_{n-1}^{(n-2)}(x)+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_1f'_2(x)+(-1)^{n-1}f_1(x)]\dfrac{dy}{dx} \\ \quad +[(\alpha+n-1)_nf_n^{(n)}(x)-(\alpha+n-2)_{n-1}f_{n-1}^{(n-1)}(x)+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(-1)^{n-2}(\alpha+1)_2f''_2(x)+(-1)^{n-1}(\alpha)_1f'_1(x)]y = 0 \end{array}\right.$$

betrachtet, in welcher (für $k = 1, 2, \dots n$) die Grösse $f_k(x)$ eine ganze Function von x des $k$ten oder eines niedrigeren Grades, ferner $f_k^{(\nu)}(x)$ die νte Ableitung von $f_k(x)$ ist, während man durch α eine Constante und durch $(\alpha+n-1)_k$ etc. Binomialcoefficienten bezeichnet. Ueber die Functionen $f_n(x), \dots f_1(x)$ und über α wird später derartig verfügt, dass die Differentialgleichung (88.) in (80.) übergeht.

Man setzt in (88.) für y das bestimmte Integral

$$(89.)\qquad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha}\mathfrak{T}\,dt,$$

in welchem $\mathfrak{T}$ nur von t abhängt, g constant, h entweder constant oder gleich x ist. Im Fall $h = x$ wird die Zahl $\alpha+n-1$ als negativ im reellen Theil vorausgesetzt. Dann ist

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = [\alpha]_\nu^+ \int_g^h (t-x)^{-\alpha-\nu}\mathfrak{T}\,dt,$$

wo $[\alpha]_\nu^+$ nach (37.) für $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)$ steht. Die Differentialgleichung (88.) verwandelt sich hierdurch in die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n-k}[\alpha]_k^+ \int_g^h \mathfrak{T}(t-x)^{-\alpha-k}\left\{\begin{array}{l} f_k(x)+f_k'(x)\dfrac{t-x}{1}+f_k''(x)\dfrac{(t-x)^2}{1.2}+\cdots \\ \cdots+f_k^{(k-1)}(x)\dfrac{(t-x)^{k-1}}{[k-1]_{k-1}}+f_k^{(k)}(x)\dfrac{(t-x)^k}{[k]_k}\end{array}\right\}dt = 0,$$

aus welcher man nach Anwendung des *Taylor*schen Satzes und nach Division durch α die folgende erhält:

$$(90.)\quad \left\{\begin{array}{l} [\alpha+1]_{n-1}^+ \int_g^h (t-x)^{-\alpha-n} f_n(t)\mathfrak{T}\,dt - [\alpha+1]_{n-2}^+ \int_g^h (t-x)^{-\alpha-n+1} f_{n-1}(t)\mathfrak{T}\,dt+\cdots \\ \qquad \cdots+(-1)^{n-2}[\alpha+1]_1^+ \int_g^h (t-x)^{-\alpha-2} f_2(t)\mathfrak{T}\,dt \\ \qquad +(-1)^{n-1}\int_g^h (t-x)^{-\alpha-1} f_1(t)\mathfrak{T}\,dt = 0.\end{array}\right.$$

[M]an transformirt nun die einzelnen Summanden dieser Gleichung, mit Aus[na]hme des letzten, durch theilweise Integration. Es ist:

$$[\alpha+1]_{k-1}^+ \int_g^h (t-x)^{-(\alpha+k)} f_k(t)\mathfrak{T}\,dt =$$

$$[\alpha+1]_{k-2}^+ \left\{-[(t-x)^{-(\alpha+k-1)} f_k(t)\mathfrak{T}]_{t=g}^{t=h} + \int_g^h (t-x)^{-(\alpha+k-1)} \frac{d(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt}\,dt\right\}.$$

[Inde]m man $k-1$ Mal theilweis integrirt, gelangt man zu der Gleichung:

$$(-1)^{n-k}[\alpha+1]^{+}_{k-1}\int_g^h (t-x)^{-\alpha-k} f_k(t)\mathfrak{T}\,dt =$$

$$(-1)^{n-k+1}\left[(t-x)^{-\alpha-k+1}\left\{\begin{array}{l}[\alpha+1]^{+}_{k-2} f_k(t)\mathfrak{T}+[\alpha+1]^{+}_{k-3}(t-x)\dfrac{d(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt}\\ +[\alpha+1]^{+}_{k-4}(t-x)^2\dfrac{d^2(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^2}+\cdots+(t-x)^{k-2}\dfrac{d^{k-2}(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^{k-2}}\end{array}\right\}\right]_{t=g}^{t=h}$$

$$+(-1)^{n-k}\int_g^h (t-x)^{-\alpha-1}\frac{d^{k-1}(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^{k-1}}\,dt.$$

Bezeichnet man also durch M den Ausdruck

$$(91.)\quad \left\{\begin{array}{l} M = \sum\limits_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]^{+}_{k-2}\;(t-x)^{-\alpha-k+1} f_k(t)\mathfrak{T}\\ \quad + \sum\limits_{k=3}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]^{+}_{k-3}\;(t-x)^{-\alpha-k+2}\dfrac{d(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt}\\ \quad + \sum\limits_{k=4}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]^{+}_{k-4}\;(t-x)^{-\alpha-k+3}\dfrac{d^2(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^2}+\cdots\\ \quad \cdots+\sum\limits_{k=n-1}^{k=n}(-1)^{n-k+1}[\alpha+1]^{+}_{k-n+1}(t-x)^{-\alpha-k+n-2}\dfrac{d^{n-3}(f_k(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-3}}\\ \qquad\qquad -(t-x)^{-\alpha-1}\dfrac{d^{n-2}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}, \end{array}\right.$$

so entsteht aus (90.) die Gleichung

$$[M]_{t=h}-[M]_{t=g}$$
$$+\int_g^h (t-x)^{-\alpha-1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^{n-1}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-1}}-\dfrac{d^{n-2}(f_{n-1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}+\cdots\\ \cdots+(-1)^{n-\nu-1}\dfrac{d^{\nu}(f_{\nu+1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{\nu}}+\cdots+(-1)^{n-1}f_1(t)\mathfrak{T}\end{array}\right\}dt = 0.$$

Die bisher beliebige Function $\mathfrak{T}$ werde jetzt als ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung

$$(92.)\quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^{n-1}(f_n(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-1}}-\dfrac{d^{n-2}(f_{n-1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{n-2}}+\cdots\\ \qquad\cdots+(-1)^{n-\nu-1}\dfrac{d^{\nu}(f_{\nu+1}(t)\mathfrak{T})}{dt^{\nu}}+\cdots+(-1)^{n-1}f_1(t)\mathfrak{T} = 0\end{array}\right.$$

definirt. Ferner suche man, wenn für $\mathfrak{T}$ ein der Gleichung (92.) genügender Ausdruck gefunden ist, die Grössen g und h so zu wählen, dass

$$[M]_{t=h}-[M]_{t=g} = 0$$

ist. Dann stellt das Integral (89.) eine Lösung der Differentialgleichung (88.) dar.

Man schreibe in (88.) α_n statt α, und führe an Stelle von $\mathfrak{T}$ eine andere Function T ein mittelst der Gleichung

$$(93.)\qquad \mathfrak{T} = t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}T,$$

in der ϱ_{n-1} eine Constante bedeutet. Hierdurch geht der Ausdruck (89.) in (83.) über, und es entsteht für T die Differentialgleichung:

$$(94.)\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}(-1)^{n-\nu-1}\frac{d^\nu(t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}f_{\nu+1}(t)T)}{dt^\nu}+(-1)^{n-1}t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}f_1(t)T = 0.$$

Letztere kann nun, wie gezeigt werden soll, nach Division mit der Potenz $t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}+1}$, durch passende Wahl der ganzen Functionen $f_1, \dots f_n$ mit der Gleichung (85.) identisch gemacht werden.

In (94.) wird, wenn man zur Abkürzung ε statt $\alpha_n-\varrho_{n-1}$ schreibt, der Factor von $\frac{d^iT}{dt^i}$ durch die Summe

$$(n-1)_i\frac{d^{n-i-1}(t^\varepsilon f_n(t))}{dt^{n-i-1}}-(n-2)_i\frac{d^{n-i-2}(t^\varepsilon f_{n-1}(t))}{dt^{n-i-2}}+\cdots\pm(i+1)_i\frac{d(t^\varepsilon f_{i+2}(t))}{dt}\mp t^\varepsilon f_{i+1}(t)$$

angegeben, welche gleichzeitig für $i=0$ in den Factor von T übergeht. Man setzt diese Summe, um die Gleichung (94.) in die Gleichung (85.) überzuführen, für $i=n-1,\ n-2,\ \dots\ 2,\ 1$ gleich dem Product

$$t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}+i}P_i(t),\quad = \beta_i t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}+i+1}-\gamma_i t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}+i},$$

wo β_i und γ_i die Constanten (87.) bezeichnen. Man nimmt ferner, indem man β_0 und γ_0 als die Werthe

$$\beta_0 = P_0 = A'_{n-1},\quad \gamma_0 = 0$$

definirt, den Coefficienten von T in (94.) gleich $\beta_0 t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}+1}$, sodass die soeben erwähnte Bestimmung auch im Fall $i=0$ gilt. Hierdurch entsteht das System der n Gleichungen

$$t^\varepsilon f_n(t) = \beta_{n-1}t^{\varepsilon+n}-\gamma_{n-1}t^{\varepsilon+n-1},$$

$$(n-1)_{n-2}\frac{d(t^\varepsilon f_n(t))}{dt}-t^\varepsilon f_{n-1}(t) = \beta_{n-2}t^{\varepsilon+n-1}-\gamma_{n-2}t^{\varepsilon+n-2},$$

$$(n-1)_{n-3}\frac{d^2(t^\varepsilon f_n(t))}{dt^2}-(n-2)_{n-3}\frac{d(t^\varepsilon f_{n-1}(t))}{dt}+t^\varepsilon f_{n-2}(t) = \beta_{n-3}t^{\varepsilon+n-2}-\gamma_{n-3}t^{\varepsilon+n-3},$$

. . . .

dessen Auflösung die Werthe

$$f_n(t) = t^{n-1}(\beta_{n-1}t-\gamma_{n-1}) = t^{n-1}(t-1),$$

$$f_{n-1}(t) = \{(n-1)(\varepsilon+n)\beta_{n-1}-\beta_{n-2}\}t^{n-1}-\{(n-1)(\varepsilon+n-1)\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}\}t^{n-2},$$

$$f_{n-2}(t) = \{(n-1)_2[\varepsilon+n]_2\beta_{n-1}-(n-2)_1[\varepsilon+n-1]_1\beta_{n-2}+\beta_{n-3}\}t^{n-2}$$
$$-\{(n-1)_2[\varepsilon+n-1]_2\gamma_{n-1}-(n-2)_1[\varepsilon+n-2]_1\gamma_{n-2}+\gamma_{n-3}\}t^{n-3}, \quad \text{etc.},$$

allgemein

$$f_k(t) = B_k t^k - C_k t^{k-1}$$

liefert, wo für $k = n, n-1, \dots 2$

$$(95.)\quad \begin{cases} B_k = \sum\limits_{i=k}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}\beta_{i-1}, \\ C_k = \sum\limits_{i=k}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i-1]_{i-k}\gamma_{i-1} \\ \text{und} \\ B_1 = \sum\limits_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i]_{i-1}\beta_{i-1}, \\ C_1 = \sum\limits_{i=2}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i-1]_{i-1}\gamma_{i-1} \end{cases}$$

gesetzt ist. Zum Beweise dieser Gleichungen nimmt man an, dass die Functionen $f_n, f_{n-1}, \dots f_{k+1}$ die soeben angegebenen Werthe haben, und leitet für f_k den entsprechenden Ausdruck ab. Da f_k durch die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} t^{-\varepsilon}\Big\{(n-1)_{k-1}\dfrac{d^{n-k}(t^\varepsilon f_n(t))}{dt^{n-k}} -(n-2)_{k-1}\dfrac{d^{n-k-1}(t^\varepsilon f_{n-1}(t))}{dt^{n-k-1}} \cdots\cdots \\ \quad +(-1)^{n-k-1}(k)_{k-1}\dfrac{d(t^\varepsilon f_{k+1}(t))}{dt}\Big\} +(-1)^{n-k}t^\varepsilon f_k(t) \end{array}\right| = \beta_{k-1}t^{\varepsilon+k}-\gamma_{k-1}t^{\varepsilon+k-1}$$

oder

$$f_k(t) = (-1)^{n-k}(\beta_{k-1}t^k-\gamma_{k-1}t^{k-1})+t^{-\varepsilon}\sum_{u=k+1}^{u=n}(-1)^{u-k-1}(u-1)_{k-1}\frac{d^{u-k}(t^\varepsilon f_u(t))}{dt^{u-k}}$$

bestimmt wird, so erhält man, wenn der Voraussetzung gemäss rechts $f_u(t) = B_u t^u - C_u t^{u-1}$ substituirt wird, die Gleichung

$$f_k(t) = (-1)^{n-k}(\beta_{k-1}t^k-\gamma_{k-1}t^{k-1})-B't^k-C't^{k-1},$$

in welcher B', C' die Constanten

$$B' = \sum_{u=k+1}^{u=n}(-1)^{u-k-1}(u-1)_{k-1}[\varepsilon+u]_{u-k}B_u,$$

$$C' = \sum_{u=k+1}^{u=n}(-1)^{u-k-1}(u-1)_{k-1}[\varepsilon+u-1]_{u-k}C_u$$

bedeuten. Wird in der Doppelsumme, die für B' durch Substitution der

Werthe (95.) entsteht, die Summationsfolge nach (65.) geändert, so hat man:

$$B' = \sum_{i=k+1}^{i=n}(-1)^{n-i}\beta_{i-1}\sum_{\mu=k+1}^{\mu=i}(-1)^{\mu-k-1}(i-1)_{i-\mu}(\mu-1)_{k-1}[\varepsilon+i]_{i-\mu}[\varepsilon+\mu]_{\mu-k}.$$

Aber da

$$[\varepsilon+i]_{i-\mu}[\varepsilon+\mu]_{\mu-k} = (\varepsilon+i)(\varepsilon+i-1)\dots(\varepsilon+\mu+1)(\varepsilon+\mu)\dots(\varepsilon+k+1) = [\varepsilon+i]_{i-k},$$

$$(i-1)_{i-\mu}(\mu-1)_{k-1} = (i-1)_{i-\mu}(\mu-1)_{\mu-k} = \frac{(i-1)(i-2)\dots\mu(\mu-1)\dots k}{1.2\dots(i-\mu)1.2\dots(\mu-k)}$$

$$= \frac{(i-1)(i-2)\dots k}{1.2\dots(i-k)}\,\frac{(i-k)(i-k-1)(i-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-k)} = (i-1)_{i-k}(i-k)_{\mu-k}$$

ist, so gelangt man zu der Gleichung

$$B' = \sum_{i=k+1}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}\beta_{i-1}\sum_{\mu=k+1}^{\mu=i}(-1)^{\mu-k-1}(i-k)_{\mu-k}$$

oder wegen der Formel

$$\sum_{\mu=k+1}^{\mu=i}(-1)^{\mu-k-1}(i-k)_{\mu-k} = (i-k)_1-(i-k)_2+(i-k)_3-\dots\pm(i-k)_{i-k} = 1$$

zu der folgenden:

$$B' = \sum_{i=k+1}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}\beta_{i-1}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$C' = \sum_{i=k+1}^{i=n}(-1)^{n-i}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i-1]_{i-k}\gamma_{i-1},$$

da B' in C' übergeht, wenn ε, β_k, ... β_n durch $\varepsilon-1$, γ_k, ... γ_n ersetzt werden. Der Vergleich mit den in (95.) angeführten Summen, bei denen zu $i=k$ die Terme $(-1)^{n-k}\beta_{k-1}$, $(-1)^{n-k}\gamma_{k-1}$ gehören, zeigt, dass in der That für $f_k(t)$ der Werth $B_kt^k-C_kt^{k-1}$ gefunden wird. Mithin ist dieses Resultat, welches für $k=n$ direct abgeleitet wurde, durch Induction auch für $k=n-1$, $n-2$, ... 2, 1 bewiesen. Bei C_1 wird, da $\gamma_0=0$ ist, als untere Summengrenze die Zahl $i=2$ (nicht $i=1$) genommen. Für B_1 hat man gemäss obiger Rechnung den Ausdruck:

$$B_1 = (-1)^{n-1}\beta_0+\sum_{i=2}^{i=n}(-1)^{n-1}[\varepsilon+i]_{i-1}\beta_{i-1} = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i}[\varepsilon+i]_{i-1}\beta_{i-1}.$$

Die Constanten β_ν und γ_ν hängen, nach (87.) und (84.), von den Grössen α'_1, ... α'_{n-1}, ϱ'_1, ... ϱ'_{n-2} ab. Statt letzterer sollen mittelst der Gleichungen (86.) die Werthe α_1, ... α_{n-1}, ϱ_1, ... ϱ_{n-2} eingeführt werden. Um die hierauf bezüglichen Rechnungen zu vereinfachen, definirt man $2n-3$ andere Constanten α''_1, ... α''_{n-1}, ϱ''_1, ... ϱ''_{n-2} durch die Gleichungen:

$\alpha'_1 = \alpha''_1+1,\ \ \alpha'_2 = \alpha''_2+1,\ \ \dots\ \ \alpha'_{n-1} = \alpha''_{n-1}+1,\ \ \varrho'_1 = \varrho''_1+1,\ \ \dots\ \ \varrho'_{n-2} = \varrho''_{n-2}+1$

und nennt in Analogie zu (84.):

$$A''_1 = \alpha''_1+\alpha''_2+\dots+\alpha''_{n-1},\quad A''_2 = \alpha''_1\alpha''_2+\alpha''_1\alpha''_3+\cdots,\quad \dots\quad A''_{n-1} = \alpha''_1\alpha''_2\dots\alpha''_{n-1},$$
$$R''_1 = \varrho''_1+\varrho''_2+\dots+\varrho''_{n-2},\quad R''_2 = \varrho''_1\varrho''_2+\varrho''_1\varrho''_3+\cdots,\quad \dots\quad R''_{n-2} = \varrho''_1\varrho''_2\dots\varrho''_{n-2},$$
$$A''_0 = R''_0 = 1.$$

Die Werthe (87.) von β_ν, γ_ν werden zunächst dadurch transformirt, dass man die Constanten $A'_1, \dots A'_{n-1}$, $R'_1, \dots R'_{n-2}$ durch $A''_1, \dots A''_{n-1}$, $R''_1, \dots R''_{n-2}$ ausdrückt. Die Formel (79.) liefert, wenn daselbst $k = 1$ gesetzt wird, die Beziehungen

$$A'_{n-i-1} = A''_{n-i-1}+(i+1)_1A''_{n-i-2}+(i+2)_2A''_{n-i-3}+\dots+(n-2)_{n-i-2}A''_1+(n-1)_{n-i-1},$$
$$R'_{n-i-1} = R''_{n-i-1}+(i)_1R''_{n-i-2}+(i+1)_2R''_{n-i-3}+\dots+(n-3)_{n-i-2}R''_1+(n-2)_{n-i-1}$$

oder, da $A''_0 = R''_0 = 1$ gesetzt wurde,

$$A'_{n-i-1} = \sum_{\lambda=i}^{\lambda=n-1}(\lambda)_{\lambda-i}A''_{n-\lambda-1},\quad R'_{n-i-1} = \sum_{\lambda=i}^{\lambda=n-1}(\lambda-1)_{\lambda-i}R''_{n-\lambda-1}.$$

Nach Substitution dieser Werthe erhält man aus (87.), wenn die Summationsfolge nach (65.) geändert wird, die Gleichungen:

$$\beta_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-1}A''_{n-\lambda-1}\sum_{i=\nu}^{i=\lambda}(\lambda)_{\lambda-i}d^{(i-1)}_{\nu-1},\quad \gamma_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-1}R''_{n-\lambda-1}\sum_{i=\nu}^{i=\lambda}(\lambda-1)_{\lambda-i}d^{(i-2)}_{\nu-2}.$$

Aber zufolge der Formel (68.) ist

$$\sum_{i=\nu}^{i=\lambda}(\lambda)_{\lambda-i}d^{(i-1)}_{\nu-1} = d^{(\lambda)}_\nu,\quad \sum_{i=\nu}^{i=\lambda}(\lambda-1)_{\lambda-i}d^{(i-2)}_{\nu-2} = d^{(\lambda-1)}_{\nu-1},$$

sodass für β_ν, γ_ν die Ausdrücke

$$(96.)\qquad \beta_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-1}d^{(\lambda)}_\nu A''_{n-\lambda-1},\quad \gamma_\nu = \sum_{\lambda=\nu}^{\lambda=n-1}d^{(\lambda-1)}_{\nu-1}R''_{n-\lambda-1}$$

gefunden werden. Dieselben entstehen aus den Summen (87.), wenn man die Constanten A'_i, R'_i durch A''_i, R''_i ersetzt und den unteren und den oberen Index der Coefficienten d um 1 vergrössert. — Die Werthe (96.) gelten auch für β_0 und γ_1. Denn aus (79.) folgt

$$\beta_0 = P_0 = A'_{n-1} = A''_{n-1}+A''_{n-2}+\dots+A''_1+A''_0,$$
$$\gamma_1 = R'_{n-2} = R''_{n-2}+R''_{n-3}+\dots+R''_1+R''_0,$$

und diese Summen stimmen, da $d^{(p)}_0 = 1$ ist, mit den entsprechenden Ausdrücken (96.) überein. Unter γ_0 wurde der Werth 0 verstanden.

Es möge nunmehr

$$\alpha_1'' = \alpha_1-\varrho_{n-1}, \quad \alpha_2'' = \alpha_2-\varrho_{n-1}, \quad \dots \quad \alpha_{n-1}'' = \alpha_{n-1}-\varrho_{n-1},$$
$$\varrho_1'' = \varrho_1-\varrho_{n-1}, \quad \varrho_2'' = \varrho_2-\varrho_{n-1}, \quad \dots \quad \varrho_{n-2}'' = \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}$$

gesetzt werden, wodurch den Gleichungen (86.) genügt ist. Man nennt $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{R}_1, \dots \mathfrak{R}_{n-2}$ die den Grössen (84.) analogen Combinationen von $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$, resp. $\varrho_1, \dots \varrho_{n-2}$:

$$\mathfrak{A}_1 = \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}, \quad \mathfrak{A}_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}, \quad \dots \quad \mathfrak{A}_{n-1} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1},$$
$$\mathfrak{R}_1 = \varrho_1+\cdots+\varrho_{n-2}, \quad \mathfrak{R}_2 = \varrho_1\varrho_2+\varrho_1\varrho_3+\cdots+\varrho_{n-3}\varrho_{n-2}, \quad \dots \quad \mathfrak{R}_{n-2} = \varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-2},$$

und $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{R}_0 = 1$. Dann ergeben sich aus der Formel (79.), in welcher $k = \varrho_{n-1}$, $\nu = n-i$ genommen wird, die Gleichungen

$$(97.) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_{n-i} = A_{n-i}''+(i)_1\varrho_{n-1}A_{n-i-1}''+(i+1)_2\varrho_{n-1}^2A_{n-i-2}''+\cdots \\ \qquad\cdots+(n-2)_{n-i-1}\varrho_{n-1}^{n-i-1}A_1''+(n-1)_{n-i}\varrho_{n-1}^{n-i}A_0'', \\ \mathfrak{R}_{n-i} = R_{n-i}''+(i-1)_1\varrho_{n-1}R_{n-i-1}''+(i)_2\varrho_{n-1}^2R_{n-i-2}''+\cdots \\ \qquad\cdots+(n-3)_{n-i-1}\varrho_{n-1}^{n-i-1}R_1''+(n-2)_{n-i}\varrho_{n-1}^{n-i}R_0''. \end{cases}$$

Die in (81.) definirten Constanten $A_1, \dots A_n$, $R_1, \dots R_{n-1}$ sind mit $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_{n-1}$, $\mathfrak{R}_1, \dots \mathfrak{R}_{n-2}$ durch die Relationen

$$(98.) \quad \begin{cases} A_\lambda = \mathfrak{A}_\lambda+\alpha_n\mathfrak{A}_{\lambda-1} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots n-1, \quad A_n = \alpha_n\mathfrak{A}_{n-1}, \\ R_\lambda = \mathfrak{R}_\lambda+\varrho_{n-1}\mathfrak{R}_{\lambda-1} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots n-2, \quad R_{n-1} = \varrho_{n-1}\mathfrak{R}_{n-2} \end{cases}$$

verbunden, welche unmittelbar aus dem Begriff der Combination folgen. Substituirt man in (98.) für $\mathfrak{R}_\lambda$, $\mathfrak{R}_{\lambda-1}$ die Werthe (97.) und berücksichtigt die Formel (67.), so findet man

$$R_{n-i} = R_{n-i}''+(i)_1\varrho_{n-1}R_{n-i-1}''+(i+1)_2\varrho_{n-1}^2R_{n-i-2}''+\cdots$$
$$\cdots+(n-2)_{n-i-1}\varrho_{n-1}^{n-i-1}R_1''+(n-1)_{n-i}\varrho_{n-1}^{n-i}R_0''$$

für $i > 1$, während

$$R_{n-1} = \varrho_{n-1}R_{n-2}''+\varrho_{n-1}^2R_{n-3}''+\cdots+\varrho_{n-1}^{n-2}R_1''+\varrho_{n-1}^{n-1}R_0''$$

ist.

§ 10.

Nachdem die in (88.) vorkommenden Functionen $f_1, \dots f_n$ derartig bestimmt worden sind, dass die Differentialgleichung (94.) für die Function T gleichlautend mit (85.) wurde, soll nun mit Hülfe der Gleichungen (95.)

bis (98.) gezeigt werden, dass nach Berücksichtigung der Relationen (86.) die Differentialgleichung (88.) in (80.) übergeht.

In (88.) ist, wenn $f_k(x) = B_k x^k - C_k x^{k-1}$ und $\alpha = \alpha_n$ substituirt wird, der Factor von $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$ gleich $x^{\nu-1}\psi_\nu(x)$, wo durch $\psi_\nu(x)$ die lineare Function $D_\nu x - E_\nu$, und durch D_ν, E_ν die Constanten

$$(99.) \quad \begin{cases} D_\nu = \sum_{k=\nu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_n+k-1)_{k-\nu}[k]_{k-\nu}B_k, \\ E_\nu = \sum_{k=\nu}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_n+k-1)_{k-\nu}[k-1]_{k-\nu}C_k \end{cases}$$

bezeichnet werden. Der Werth E_1 macht jedoch hierbei eine Ausnahme; denn der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ lautet (wenn der zu $k = \nu = 1$ gehörige Summandus für sich geschrieben wird):

$$(-1)^{n-1}f_1(k) + \sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_n+k-1)_{k-1}\frac{d^{k-1}f_k(x)}{dx^{k-1}},$$

woraus für E_1 die Gleichung

$$E_1 = (-1)^{n-1}C_1 + \sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_n+k-1)_{k-1}[k-1]_{k-1}C_k,$$

oder da

$$(\alpha_n+k-1)_{k-1}[k-1]_{k-1} = (\alpha_n+k-1)_{k-1}(k-1)(k-2)\dots 2.1 = [\alpha_n+k-1]_{k-1}$$

ist, die folgende

$$E_1 = (-1)^{n-1}C_1 + \sum_{k=2}^{k=n}(-1)^{n-k}[\alpha_n+k-1]_{k-1}C_k = \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n-k}[\alpha_n+k-1]_{k-1}C_k$$

erhalten wird. Der Coefficient von y in (88.), welcher ψ_0 genannt werden möge, hat den Werth:

$$\psi_0 = \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{n-k}(\alpha_n+k-1)_k[k]_k B_k.$$

Damit die Differentialgleichungen (80.) und (88.) mit einander identisch werden, muss für $\nu = 1, 2, \dots n$

$$\psi_\nu(x) = Q_\nu(x), \quad \psi_0 = Q_0$$

sein. Man beweist die Uebereinstimmung von ψ_ν mit Q_ν, indem man die Ausdrücke der Constanten D_ν und E_ν umformt. Da die Rechnungen für die Constanten E_ν etwas einfacher sind als die auf D_ν bezüglichen, so soll mit diesen begonnen werden.

Wenn man in den Ausdruck (99.) der Grösse E_ν die in (95.) an-

gegebenen Werthe der Constanten C_k einsetzt und nach (65.) die Reihenfolge der zwei Summationen vertauscht, so findet man für $\nu > 1$:

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} \gamma_{i-1} \sum_{k=\nu}^{k=i} (-1)^{i-k} (\alpha_n+k-1)_{k-\nu} [k-1]_{k-\nu} (i-1)_{i-k} [\varepsilon+i-1]_{i-k}.$$

Statt $(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i-1]_{i-k}$ kann $[i-1]_{i-k}(\varepsilon+i-1)_{i-k}$ geschrieben werden. Ferner ist

$$[i-1]_{i-k}[k-1]_{k-\nu} = (i-1)(i-2)\dots k(k-1)\dots\nu = [i-1]_{i-\nu},$$

sodass sich für E_ν der Werth

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} [i-1]_{i-\nu} \gamma_{i-1} \sum_{k=\nu}^{k=i} (-1)^{i-k} (\alpha_n+k-1)_{k-\nu} (\varepsilon+i-1)_{i-k}$$

ergiebt. Diese Gleichung gilt auch für $\nu = 1$, falls bei der Summation nach i die Zahl $i = 2$ (statt $i = 1$) als untere Grenze genommen wird. Denn durch E_1 wird die Constante

$$E_1 = (-1)^{n-1} \sum_{i=2}^{i=n} (-1)^{n-i} [\varepsilon+i-1]_{i-1} \gamma_{i-1}$$

$$+ \sum_{k=2}^{k=n} (-1)^{n-k} [\alpha_n+k-1]_{k-1} \sum_{i=k}^{i=n} (-1)^{n-i} (i-1)_{i-k} [\varepsilon+i-1]_{i-k} \gamma_{i-1}$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} (-1)^{i-1} [\varepsilon+i-1]_{i-1} \gamma_{i-1} + \sum_{i=2}^{i=n} [i-1]_{i-1} \gamma_{i-1} \sum_{k=2}^{k=i} (-1)^{i-k} (\alpha_n+k-1)_{k-1} (\varepsilon+i-1)_{i-k}$$

bezeichnet, und da die rechts stehende einfache Summe (nach i) gerade diejenigen Terme enthält, welche in der Doppelsumme dem Werthe $k = 1$ entsprechen, so ist E_1 gleich der Doppelsumme:

$$E_1 = \sum_{i=2}^{i=n} [i-1]_{i-1} \gamma_{i-1} \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i-k} (\alpha_n+k-1)_{k-1} (\varepsilon+i-1)_{i-k}.$$

In dem Ausdrucke von E_ν werde

$$(\alpha_n+k-1)_{k-\nu} = \frac{(\alpha_n+k-1)(\alpha_n+k-2)\dots(\alpha_n+\nu)}{1.2\dots(k-\nu)} = (-1)^{k-\nu}(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu}$$

gesetzt, woraus

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} (-1)^{i-\nu} [i-1]_{i-\nu} \gamma_{i-1} \sum_{k=\nu}^{k=i} (\varepsilon+i-1)_{i-k} (-\alpha_n-\nu)_{k-\nu}$$

folgt. Aber die bekannte Formel

$$(p+q)_r = (p)_r + (p)_{r-1}(q)_1 + (p)_{r-2}(q)_2 + \dots + (q)_r = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r} (p)_{r-\varkappa} (q)_\varkappa$$

liefert für $p = \varepsilon+i-1$, $q = -\alpha_n-\nu$, $r = i-\nu$ die Beziehung

$$\sum_{k=\nu}^{k=i} (\varepsilon+i-1)_{i-k} (-\alpha_n-\nu)_{k-\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=i-\nu} (\varepsilon+i-1)_{i-\nu-\varkappa} (-\alpha_n-\nu)_\varkappa$$

$$= (\varepsilon+i-1-\alpha_n-\nu)_{i-\nu} = (-1)^{i-\nu} (\alpha_n-\varepsilon)_{i-\nu},$$

und da durch ε die Differenz $\alpha_n - \varrho_{n-1}$ bezeichnet wurde, so entsteht für $\nu > 1$ die Gleichung

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} [i-1]_{i-\nu} (\varrho_{n-1})_{i-\nu} \gamma_{i-1} = \sum_{i=\nu}^{i=n} (i-1)_{i-\nu} [\varrho_{n-1}]_{i-\nu} \gamma_{i-1},$$

während

$$E_1 = \sum_{i=2}^{i=n} [\varrho_{n-1}]_{i-1} \gamma_{i-1}$$

ist. Nach Einführung der Werthe (96.) für die Grössen γ_{i-1} erhält man, falls $\nu > 1$ ist, für E_ν den Ausdruck

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} (i-1)_{i-\nu} [\varrho_{n-1}]_{i-\nu} \sum_{\lambda=i-1}^{\lambda=n-1} d_{i-2}^{(\lambda-1)} R''_{n-\lambda-1}$$

oder, wenn $\lambda = \mu - 1$ gesetzt und die Formel (65.) beachtet wird, den folgenden:

$$E_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{\mu=n} R''_{n-\mu} \sum_{i=\nu}^{i=\mu} (i-1)_{i-\nu} d_{i-2}^{(\mu-2)} [\varrho_{n-1}]_{i-\nu}.$$

Für E_1 ergiebt sich die Doppelsumme

$$E_1 = \sum_{\mu=2}^{\mu=n} R''_{n-\mu} \sum_{i=2}^{i=\mu} d_{i-2}^{(\mu-2)} [\varrho_{n-1}]_{i-1},$$

die durch Einführung der Summationsindices $\mu' = \mu - 2$, $i' = i - 2$ in

$$E_1 = \sum_{\mu'=0}^{\mu'=n-2} R''_{n-\mu'-2} \sum_{i'=0}^{i'=\mu'} d_{(i')}^{(\mu')} [\varrho_{n-1}]_{i'+1}$$

übergeht. Nun lautet die Formel (77.) für $m = \nu - 2$, $r = \mu - 2$, $s = \varrho_{n-1}$:

$$\sum_{l=0}^{l=\mu-\nu} (\nu+l-1)_l d_{\nu+l-2}^{(\mu-2)} [\varrho_{n-1}]_l = \sum_{l=0}^{l=\mu-\nu} (\mu-1)_l d_{\nu-2}^{(\mu-l-2)} \varrho_{n-1}^l$$

oder, wenn links $l = i - \nu$, rechts $l = \mu - i$ gesetzt wird,

$$\sum_{i=\nu}^{i=\mu} (i-1)_{i-\nu} d_{i-2}^{(\mu-2)} [\varrho_{n-1}]_{i-\nu} = \sum_{i=\nu}^{i=\mu} (\mu-1)_{\mu-i} d_{\nu-2}^{(i-2)} \varrho_{n-1}^{\mu-i},$$

sodass man für $\nu > 1$ nach abermaliger Benutzung der Formel (65.) zu der Gleichung

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)} \sum_{\mu=i}^{\mu=n} (\mu-1)_{\mu-i} \varrho_{n-1}^{\mu-i} R''_{n-\mu}$$

gelangt. Indem man endlich die am Schluss des § 9 angegebene Relation

$$\sum_{\mu=i}^{\mu=n} (\mu-1)_{\mu-i} \varrho_{n-1}^{\mu-i} R''_{n-\mu} = R_{n-i}$$

berücksichtigt, gewinnt man für E_ν den Werth:

$$E_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-2}^{(i-2)} R_{n-i}.$$

Der Vergleich mit (82.) zeigt, dass, wenn $\nu > 1$ ist, der von x freie Summandus der Function $\psi_\nu(x)$ mit dem der Function $Q_\nu(x)$ übereinstimmt. Dies gilt auch für $\nu = 1$. Denn wegen der Gleichung

$$[\varrho_{n-1}]_{i+1} = \varrho_{n-1}[\varrho_{n-1}-1]_i$$

kann die Constante E_1 auf die Form

$$E_1 = \varrho_{n-1}\sum_{\mu=0}^{\mu=n-2} R''_{n-\mu-2}\sum_{i=0}^{i=\mu} d_i^{(\mu)}[\varrho_{n-1}-1]_i$$

gebracht werden, und da nach (60.)

$$\sum_{i=0}^{i=\mu} d_i^{(\mu)}[\varrho_{n-1}-1]_i = \varrho_{n-1}^{\mu}$$

ist, so folgt:

$$E_1 = \varrho_{n-1}R''_{n-2}+\varrho_{n-1}^2 R''_{n-3}+\cdots+\varrho_{n-1}^{n-2}R''_1+\varrho_{n-1}^{n-1}R''_0 = R_{n-1}.$$

In analoger Weise findet man für D_ν, wenn man in (99.) die Ausdrücke (95.) der Constanten B_k einführt und die Summationsfolge ändert, die Doppelsumme:

$$D = \sum_{i=\nu}^{i=n}\beta_{i-1}\sum_{k=\nu}^{k=i}(-1)^{i-k}(\alpha_n+k-1)_{k-\nu}[k]_{k-\nu}(i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k}.$$

In derselben ist der Factor von $\beta_{\nu-1}$ gleich 1, da für $i=\nu$ auch der Index k nur den Werth ν hat. Man bemerke, dass nach (99.) die Grösse D_1 den Coefficienten B_1 nur in dem Summandus $(-1)^{n-1}B_1$, und der Coefficient B_1 nach (95.) die Constante β_0 nur in dem Term $(-1)^{n-1}\beta_0$ enthält, sodass β_0 in D_1 mit dem Factor 1 vorkommt. Aus diesem Grunde gilt die im Folgenden in Bezug auf D_ν angestellte Rechnung auch im Falle $\nu = 1$. Man benutzt für $i > \nu$, nachdem (wie oben)

$$(\alpha_n+k-1)_{k-\nu} = (-1)^{k-\nu}(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu},\quad (i-1)_{i-k}[\varepsilon+i]_{i-k} = [i-1]_{i-k}(\varepsilon+i)_{i-k}$$

genommen ist, die Identitäten

$$[i-1]_{i-k}[k]_{k-\nu} = (i-1)(i-2)\dots k\,k(k-1)\dots(\nu+1) = k[i-1]_{i-\nu-1},$$

$$k(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu} = (k-\nu)(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu}+\nu(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu}$$

$$= \begin{cases}(-\alpha_n-\nu)(-\alpha_n-\nu-1)_{k-\nu-1}+\nu(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu} & \text{für } k>\nu,\\ \nu \text{ für } k=\nu,\end{cases}$$

wodurch für $\nu = 1, 2, \dots n$

$$D_\nu = \beta_{\nu-1}-(\alpha_n+\nu)\sum_{i=\nu+1}^{i=n}(-1)^{i-\nu}[i-1]_{i-\nu-1}\beta_{i-1}\sum_{k=\nu+1}^{k=i}(\varepsilon+i)_{i-k}(-\alpha_n-\nu-1)_{k-\nu-1}$$
$$+\nu\sum_{i=\nu+1}^{i=n}(-1)^{i-\nu}[i-1]_{i-\nu-1}\beta_{i-1}\sum_{k=\nu}^{k=i}(\varepsilon+i)_{i-k}(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu}$$

erhalten wird. Die vorerwähnte Formel $(p+q)_r = (p)_r+\cdots$ liefert nun

$$\sum_{k=\nu+1}^{k=i}(\varepsilon+i)_{i-k}(-\alpha_n-\nu-1)_{k-\nu-1} = (\varepsilon+i-\alpha_n-\nu-1)_{i-\nu-1} = (-1)^{i-\nu-1}(\alpha_n-\varepsilon-1)_{i-\nu-1}$$
$$= (-1)^{i-\nu-1}(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu-1},$$
$$\sum_{k=\nu}^{k=i}(\varepsilon+i)_{i-k}(-\alpha_n-\nu)_{k-\nu} = (\varepsilon+i-\alpha_n-\nu)_{i-\nu} = (-1)^{i-\nu}(\alpha_n-\varepsilon-1)_{i-\nu}$$
$$= (-1)^{i-\nu}(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu},$$

sodass sich die Gleichung

$$D_\nu = \beta_{\nu-1}+\sum_{i=\nu+1}^{i=n}[i-1]_{i-\nu-1}\beta_{i-1}\{\alpha_n(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu-1}+\nu[(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu-1}+(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu}]\}$$

oder, da

$$\nu[i-1]_{i-\nu-1} = [i-1]_{i-\nu},\quad (\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu-1}+(\varrho_{n-1}-1)_{i-\nu} = (\varrho_{n-1})_{i-\nu},$$
$$[p]_k(q)_k = (p)_k[q]_k$$

ist,

$$D_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n}(i-1)_{i-\nu}[\varrho_{n-1}]_{i-\nu}\beta_{i-1}+\alpha_n\sum_{i=\nu+1}^{i=n}(i-1)_{i-\nu-1}[\varrho_{n-1}-1]_{i-\nu-1}\beta_{i-1}$$

ergiebt. Wenn man hierin für die Grössen β_{i-1} die Summen (96.), in denen der Index λ durch $\mu-1$ ersetzt werden möge, substituirt und die Formel (65.) anwendet, so ist:

$$D_\nu = \sum_{\mu=\nu}^{\mu=n}A''_{n-\mu}\sum_{i=\nu}^{i=\mu}(i-1)_{i-\nu}d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}]_{i-\nu}$$
$$+\alpha_n\sum_{\mu=\nu+1}^{\mu=n}A''_{n-\mu}\sum_{i=\nu+1}^{i=\mu}(i-1)_{i-\nu-1}d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}-1]_{i-\nu-1}.$$

Aber für $r=\mu-1$, $m=\nu-1$, $z=\varrho_{n-1}$ folgt aus (75.) und (78.)

$$\sum_{l=0}^{l=\mu-\nu}(\nu+l-1)_l d_{\nu+l-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}]_l = \sum_{l=0}^{l=\mu-\nu}(\mu-1)_l d_{\nu-1}^{(\mu-l-1)}\varrho_{n-1}^l,$$
$$\sum_{l=1}^{l=\mu-\nu}(\nu+l-1)_{l-1}d_{\nu+l-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}-1]_{l-1} = \sum_{l=1}^{l=\mu-\nu}(\mu-1)_{l-1}d_{\nu-1}^{(\mu-l-1)}\varrho_{n-1}^{l-1}$$

oder, wenn in diesen Gleichungen links $l=i-\nu$, rechts $l=\mu-i$, resp. $l=\mu-i+1$ genommen wird,

$$\sum_{i=\nu}^{i=\mu}(i-1)_{i-\nu}d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}]_{i-\nu} = \sum_{i=\nu}^{i=\mu}(\mu-1)_{\mu-i}d_{\nu-1}^{(i-1)}\varrho_{n-1}^{\mu-i},$$
$$\sum_{i=\nu+1}^{i=\mu}(i-1)_{i-\nu-1}d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}-1]_{i-\nu-1} = \sum_{i=\nu+1}^{i=\mu}(\mu-1)_{\mu-i}d_{\nu-1}^{(i-2)}\varrho_{n-1}^{\mu-i}.$$

Indem man diese Ausdrücke einsetzt und (65.) berücksichtigt, hat man für D_ν die Gleichung:

$$D_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-1)} \sum_{\mu=i}^{\mu=n} (\mu-1)_{\mu-i} \varrho_{n-1}^{\mu-i} A''_{n-\mu}$$
$$+\alpha_n \sum_{i=\nu+1}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-2)} \sum_{\mu=i}^{\mu=n} (\mu-1)_{\mu-i} \varrho_{n-1}^{\mu-i} A''_{n-\mu}$$

oder, da nach (97.)

$$\sum_{\mu=i}^{\mu=n} (\mu-1)_{\mu-i} \varrho_{n-1}^{\mu-i} A''_{n-\mu} = \mathfrak{A}_{n-i}$$

ist,

$$D_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-1)} \mathfrak{A}_{n-i} + \alpha_n \sum_{i=\nu+1}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-2)} \mathfrak{A}_{n-i}.$$

Die zweite Summe geht für $i = i'+1$ in

$$\alpha_n \sum_{i'=\nu}^{i'=n-1} d_{\nu-1}^{(i'-1)} \mathfrak{A}_{n-i'-1}$$

über, sodass, wenn in der ersten Summe der zu $i = n$ gehörige Term besonders geschrieben wird, die Gleichung

$$D_\nu = d_{\nu-1}^{(n-1)} \mathfrak{A}_0 + \sum_{i=\nu}^{i=n-1} d_{\nu-1}^{(i-1)} [\mathfrak{A}_{n-i} + \alpha_n \mathfrak{A}_{n-i-1}]$$

entsteht. Da nun nach (98.) für $\lambda = 1, 2, \dots n-1$

$$A_\lambda = \mathfrak{A}_\lambda + \alpha_n \mathfrak{A}_{\lambda-1},$$

ferner $\mathfrak{A}_0 = A_0 = 1$ ist, so erhält man die Gleichung

$$D_\nu = \sum_{i=\nu}^{i=n} d_{\nu-1}^{(i-1)} A_{n-i},$$

welche beweist, dass die linearen Functionen $\psi_\nu(x)$ und $Q_\nu(x)$ auch gleiche Factoren von x haben. Also ist für $\nu = 1, 2, \dots n$:

$$\psi_\nu(x) = Q_\nu(x).$$

Es bleibt übrig, zu zeigen, dass $\psi_0 = Q_0 = A_n$ ist. Durch ψ_0 wurde die Constante

$$\psi_0 = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} (\alpha_n + k - 1)_k [k]_k B_k$$

bezeichnet. Dieselbe wird aus dem Ausdruck (99.) der Constante D_ν für $\nu = 0$ erhalten, falls man unter B_0 den Werth Null versteht. Daher gilt der erste Theil der für D_ν durchgeführten Rechnung auch für $\nu = 0$ (unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die untere Summengrenze hier gleich 1 ist), und es ergiebt sich:

$$\psi_0 = \alpha_n \sum_{i=1}^{i=n} [\varrho_{n-1}-1]_{i-1} \beta_{i-1} = \alpha_n \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A''_{n-\mu} \sum_{i=1}^{i=\mu} d_{i-1}^{(\mu-1)} [\varrho_{n-1}-1]_{i-1}.$$

Aber nach (60.) und (97.) ist

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} d_{i-1}^{(\mu-1)}[\varrho_{n-1}-1]_{i-1} = \varrho_{n-1}^{\mu-1}, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A''_{n-\mu}\varrho_{n-1}^{\mu-1} = \mathfrak{A}_{n-1},$$

sodass für ψ_0 in der That der Werth

$$\psi_0 = \alpha_n \mathfrak{A}_{n-1} = A_n$$

gefunden wird.

Hiermit ist bewiesen, dass das bestimmte Integral (83.)

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_n} t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}-1} T dt$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (80.) ist, sobald die Function T die Differentialgleichung (85.), deren Coefficienten durch (87.), (84.), (86.) bestimmt sind, befriedigt, und ausserdem die Gleichung

$$[M]_{t=h} - [M]_{t=g} = 0$$

erfüllt ist. Um der letzteren Bedingung zu entsprechen, sollen die Integralgrenzen g und h hier derartig gewählt werden, dass die in (91.) angegebene Grösse M für $t=g$ und $t=h$ verschwindet.

§ 11.

Als Grenzen g, h, welche dieser Anforderung genügen, ergeben sich die Werthe x, 0, 1, ∞. Der Ausdruck M, in welchem

$$\alpha = \alpha_n, \quad f_k(t) = B_k x^k - C_k x^{k-1}$$

zu setzen ist, nimmt, wie aus (91.) unmittelbar folgt, für $t=x$ den Werth 0 an, wenn die Zahl α_n+n-1 im reellen Theil negativ ist. Unter letzterer Voraussetzung darf man also $h=x$ wählen. Um zu zeigen, dass die Grenzen 0, 1, ∞ für (83.) anwendbar sind, integrirt man die Differentialgleichung (85.) durch Reihen. Zuvor soll indessen eine kurze Transformation durchgeführt werden.

Nennt man $\chi_1(z)$ und $\chi_2(z)$ die Functionen

$$\chi_1(z) = \beta_0+\beta_1[z]_1+\beta_2[z]_2+\cdots+\beta_{n-1}[z]_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \beta_\nu[z]_\nu,$$

$$\chi_2(z) = \gamma_1+\gamma_2[z-1]_1+\gamma_3[z-1]_2+\cdots+\gamma_{n-1}[z-1]_{n-2} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \gamma_\nu[z-1]_{\nu-1},$$

so ist, wie im § 9 bewiesen wurde,

$$\chi_1(z) = (z+\alpha_1')(z+\alpha_2')\dots(z+\alpha_{n-1}')$$
$$= (z-\varrho_{n-1}+\alpha_1+1)(z-\varrho_{n-1}+\alpha_2+1)\dots(z-\varrho_{n-1}+\alpha_{n-1}+1).$$

In $\chi_2(z)$ substituire man die Werthe γ_ν aus (96.) und benutze die Formel (65.); dann entsteht die Gleichung:

$$\chi_2(z) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} R''_{n-\lambda-1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} d_{\nu-1}^{(\lambda-1)}[z-1]_{\nu-1}.$$

Aber da nach (60.)

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} d_{\nu-1}^{(\lambda-1)}[z-1]_{\nu-1} = z^{\lambda-1}$$

ist, so folgt

$$\chi_2(z) = z^{n-2}+R_1''z^{n-3}+R_2''z^{n-4}+\dots+R''_{n-3}z+R''_{n-2}$$

oder, wenn man die Definition der Constanten R_1'', ... R''_{n-2} in § 9, sowie die Gleichungen (86.) beachtet,

$$\chi_2(z) = (z+\varrho_1'')(z+\varrho_2'')\dots(z+\varrho''_{n-2}) = (z-\varrho_{n-1}+\varrho_1)(z-\varrho_{n-1}+\varrho_2)\dots(z-\varrho_{n-1}+\varrho_{n-2}).$$

Führt man in die Differentialgleichung (85.) nach einander zwei Reihen von der Form

$$T = c_0t^p+c_1t^{p+1}+c_2t^{p+2}+\cdots,$$
$$T = c_0't^q+c_1't^{q-1}+c_2't^{q-2}+\cdots$$

ein, so werden p und q durch die Gleichungen

$$p\{\gamma_1+\gamma_2[p-1]_1+\gamma_3[p-1]_2+\dots+\gamma_{n-1}[p-1]_{n-2}\} = p\chi_2(p) = 0,$$
$$\beta_0+\beta_1[q]_1+\beta_2[q]_2+\dots+\beta_{n-1}[q]_{n-1} = \chi_1(q) = 0$$

bestimmt, welche, zufolge der erwähnten Transformation von χ_1 und χ_2, die Werthe

$$p = 0, \quad = \varrho_{n-1}-\varrho_1, \quad = \varrho_{n-1}-\varrho_2, \quad \dots \quad = \varrho_{n-1}-\varrho_{n-2},$$
$$q = \varrho_{n-1}-\alpha_1-1, \quad = \varrho_{n-1}-\alpha_2-1, \quad \dots \quad = \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1$$

liefern. Für die Function $\mathfrak{T}$, $= t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}T$, ergeben sich hiernach Reihenentwickelungen von der Form

$$\mathfrak{T} = t^{\alpha_n-\varrho_i}\{c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots\},$$
$$\mathfrak{T} = t^{\alpha_n-\alpha_i-1}\{c_0'+c_1't^{-1}+c_2't^{-2}+\cdots\},$$

wo $i = 1, 2, \dots n-1$ zu nehmen ist. Setzt man statt $\mathfrak{T}$ zunächst eine Reihe der ersteren Art in (91.) ein, so erhält man eine Entwickelung des Ausdrucks M nach steigenden Potenzen von t, in welcher $t^{\alpha_n-\varrho_i+1}$ die nie-

drigste Potenz ist; folglich verschwindet M für $t=0$, wenn der betreffende Anfangsexponent $\alpha_n-\varrho_i+1$ im reellen Theil positiv ist. Wird ferner für $\mathfrak{T}$ eine der an zweiter Stelle genannten Reihen substituirt, so findet man $t^{-\alpha_i}$ als Anfangspotenz der entsprechenden Entwickelung von M nach fallenden Potenzen von t, sodass M für $t=\infty$ den Werth Null annimmt, falls der reelle Bestandtheil von α_i positiv ist. Man setze voraus, dass die Ungleichheiten

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \dots\ \alpha_{n-1}>0,\ \alpha_n<1-n,\ \varrho_1<\alpha_n+1,\ \dots\ \varrho_{n-1}<\alpha_n+1,$$

welche im Fall complexer Werthe auf die reellen Bestandtheile zu beziehen sind, gleichzeitig erfüllt seien. Dann übertragen sich die letzteren Schlussfolgerungen auf das allgemeine Integral der Differentialgleichung (85.) (für die Umgebung von $t=0$ und für das Gebiet der grossen Werthe von t). Man darf also unter der genannten Voraussetzung, während T eine beliebige particuläre Lösung von (85.) ist, in dem bestimmten Integral (83.) die Grenzen g und h gleich irgend zwei der drei Werthe x, 0, ∞ wählen.

Wird endlich die Gleichung (85.) durch eine Reihe von der Form

$$T = (t-1)^r\{k_0+k_1(t-1)+k_2(t-1)^2+\cdots\}$$

integrirt, so ist nur eins der hierdurch entstehenden particulären Integrale mehrdeutig bei $t=1$; in demselben sind die Coefficienten bis auf einen gemeinsamen Factor vollständig bestimmt, und der Anfangsexponent hat den Werth:

$$r = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-1}-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})-1.$$

Andererseits bleiben bei Einführung der Reihe

$$T = k_0+k_1(t-1)+k_2(t-1)^2+\cdots$$

die $n-2$ ersten Coefficienten k_0, k_1, ... k_{n-3} willkürlich. Man setze in (91.) für T zunächst das genannte mehrdeutige Integral. Dann nimmt die Grösse M, wie man durch Aufsuchen der niedrigsten vorkommenden Potenz von $t-1$ erkennt, für $t=1$ den Werth Null an, falls der reelle Theil der Constante

$$\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-1}-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})-n+3$$

positiv ist. Also darf man unter der Voraussetzung, dass die Constanten dieser Ungleichheit genügen, g oder h in (83.) gleich 1 nehmen, wenn daselbst für T das bei dem Punkte $t=1$ mehrdeutige Hauptintegral der Differentialgleichung (85.) substituirt wird.

Dagegen ist, falls T gleich einer Reihe von der Form

$$k_0+k_1(t-1)+k_2(t-1)^2+\cdots$$

gesetzt wird, der Ausdruck M für $t=1$ im Allgemeinen nicht gleich Null, sondern gleich einer Summe

$$\varkappa_1(x-1)^{-\alpha_n-1}+\varkappa_2(x-1)^{-\alpha_n-2}+\cdots+\varkappa_{n-2}(x-1)^{-\alpha_n-n+2},$$

in welcher $\varkappa_1, \dots \varkappa_{n-2}$ Constante bedeuten. Also genügt das Integral (83.), wenn die Grenze g gleich 1, die Grenze h gleich einem der Werthe x, 0, ∞ genommen, und für T eine solche, bei $t=1$ eindeutige particuläre Lösung von (85.) substituirt wird, nicht der betrachteten Differentialgleichung (80.), sondern (wie aus § 9 folgt) einer nicht homogenen Differentialgleichung, die aus (80.) erhalten wird, wenn rechts ein Ausdruck

$$\varkappa_1'(x-1)^{-\alpha_n-1}+\cdots+\varkappa_{n-2}'(x-1)^{-\alpha_n-n+2}$$

(in welchem $\varkappa_1', \dots \varkappa_{n-2}'$ constant sind) an Stelle der Null tritt.

§ 12.

Mit Hülfe der vorstehenden Rechnungen findet man $(n-1)$-fache bestimmte Integrale als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (80.). Für $n=3$ genügen der letzteren nach (16.) die Doppelintegrale

$$y = \int_{g_2}^{h_2} dv_2 \int_{g_1}^{h_1} (v_2-x)^{-\alpha_3} v_2^{\alpha_3-\varrho_2} (v_1-v_2)^{\varrho_2-\alpha_2-1} v_1^{\alpha_2-\varrho_1} (v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1} dv_1,$$

für $n=4$ nach (47.), (48.) die dreifachen Integrale

$$y = \int_{g_3}^{h_3} dv_3 \int_{g_2}^{h_2} dv_2 \int_{g_1}^{h_1} \Phi(v_1, v_2, v_3, x) dv_1,$$

in denen $\Phi(v_1, v_2, v_3, x)$ die Function

$$(v_3-x)^{-\alpha_4} v_3^{\alpha_4-\varrho_3} (v_2-v_3)^{\varrho_3-\alpha_3-1} v_2^{\alpha_3-\varrho_2} (v_1-v_2)^{\varrho_2-\alpha_2-1} v_1^{\alpha_2-\varrho_1} (v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1}$$

bedeutet, während für g_i, h_i theils die constanten Werthe 0, 1, ∞, theils die variablen x, v_2, resp. v_3 zu setzen sind. Man nenne für ein beliebiges n:

$$(100.)\quad \begin{cases} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x) \\ = (v_{n-1}-x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}} (v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1} \prod_{k=2}^{k=n-1} (v_{k-1}-v_k)^{\varrho_k-\alpha_k-1} v_{k-1}^{\alpha_k-\varrho_{k-1}}. \end{cases}$$

Dann wird die Differentialgleichung (80.) durch Integrale von der Form

$$(101.)\quad y = \int_{g_{n-1}}^{h_{n-1}} dv_{n-1} \int_{g_{n-2}}^{h_{n-2}} dv_{n-2} \dots \int_{g_1}^{h_1} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x) dv_1,$$

in denen die Integration nach v_1 zuerst, die nach v_{n-1} zuletzt auszuführen ist, befriedigt.

Zu diesem Resultat gelangt man durch Inductionsschluss. Nimmt man an, die Behauptung sei richtig für die Differentialgleichung $(n-1)$ter Ordnung (85.), die analog zu (80.) unter Anwendung der Constanten α'_1, ϱ'_1, ... gebildet ist, so darf man für T, bei passender Wahl der Grenzen, das nach $v_1, v_2, \dots v_{n-2}$ genommene $(n-2)$-fache bestimmte Integral der Function

$$(v_{n-2}-t)^{-\alpha'_{n-1}} v_{n-2}^{\alpha'_{n-1}-\varrho'_{n-2}} (v_1-1)^{\varrho'_1-\alpha'_1-1} \prod_{k=2}^{k=n-2} (v_{k-1}-v_k)^{\varrho'_k-\alpha'_k-1} v_{k-1}^{\alpha'_k-\varrho'_{k-1}}$$

setzen. Aber da nach (86.)

$$\varrho'_1-\alpha'_1 = \varrho_1-\alpha_1, \quad \dots \quad \varrho'_{n-2}-\alpha'_{n-2} = \varrho_{n-2}-\alpha_{n-2}, \quad -\alpha'_{n-1} = \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1,$$
$$\alpha'_2-\varrho'_1 = \alpha_2-\varrho_1, \quad \dots \quad \alpha'_{n-1}-\varrho'_{n-2} = \alpha_{n-1}-\varrho_{n-2}$$

ist, so geht das für die Gleichung (80.) ermittelte particuläre Integral (83.)

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_n} t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}} T dt,$$

wenn v_{n-1} statt t geschrieben wird, in der That in ein $(n-1)$-faches bestimmtes Integral über, in welchem die zu integrirende Function gleich $\Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)$ ist.

Die Werthe, welche man für die Grenzen $g_1, h_1, \dots g_{n-1}, h_{n-1}$ des Integrals (101.) setzen darf, ergeben sich aus § 11. Als Grenzen g_k, h_k für die Integration nach der Variablen v_k nimmt man, wenn $k = n-1$ ist, zwei der vier Grössen

$$0, \quad 1, \quad \infty, \quad x,$$

und wenn $k < n-1$ ist, zwei der Grössen

$$0, \quad 1, \quad \infty, \quad v_{k+1},$$

da der Grenze x, welche nach § 11 für die Integration nach t zulässig ist, gemäss obigem Inductionsverfahren die Grenze v_{k+1} bei der Integration nach v_k entspricht.

Die Anwendung der Grenze 1 führt nach § 11 zu gewissen Beschränkungen in Bezug auf die Wahl der übrigen Grenzen. Ist in (101.) irgend eine Grenze g_k (oder h_k) gleich 1, so muss für jedes i, welches kleiner als k ist,

$$g_i = 1, \quad h_i = v_{i+1}$$

gesetzt werden. Denn die im § 11 für das Integral (83.) abgeleitete Be-

dingung, dass die Grenze 1 nur benutzt werden darf, wenn für T die bei $t=1$ mehrdeutige Hauptlösung von (85.) substituirt wird, ist auf die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung zu übertragen, welche für die Lösung der Gleichung (80.) successiv in Betracht kommen. Aus dem bestimmten Integral von der oben erwähnten Form wird aber die in der Umgebung des Punktes 1 mehrdeutige Hauptlösung der betreffenden Differentialgleichung stets dadurch erhalten, dass man, wie in (22.) und (54.), alle unteren Integralgrenzen gleich 1, alle oberen gleich den zulässigen variablen Werthen nimmt. Um letzteres zu beweisen, transformirt man das bezügliche $(n-1)$-fache Integral; diese Rechnung ist ausreichend, da n eine beliebige Zahl ist. Werden in den Ausdruck

$$\text{(102.)} \quad \int_1^x dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_1^{v_2} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1$$

statt $v_1, \dots v_{n-1}$ neue Variable $t_1, \dots t_{n-1}$ mittelst der Gleichungen

$$v_1-1 = (v_2-1)t_1, \quad v_2-1 = (v_3-1)t_2, \quad \dots \quad v_{n-2}-1 = (v_{n-1}-1)t_{n-2},$$
$$v_{n-1}-1 = (x-1)t_{n-1},$$

aus denen

$$v_1-1 = (x-1)t_1 t_2 \dots t_{n-1}, \quad v_2-1 = (x-1)t_2 t_3 \dots t_{n-1}, \quad \dots$$
$$v_{n-2}-1 = (x-1)t_{n-2}t_{n-1}, \quad v_{n-1}-1 = (x-1)t_{n-1}$$

folgt, eingeführt, so geht derselbe, abgesehen von einem constanten Factor (der gleich einer Potenz von -1 ist), in das Product aus der Potenz

$$(x-1)^{\varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_{n-1}-a_1-a_2-\dots-a_n}$$

und dem Integral

$$\int_0^1 t_1^{\varrho_1-a_1-1}(1-t_1)^{\varrho_2-a_2-1} dt_1 \int_0^1 t_2^{\varrho_1+\varrho_2-a_1-a_2-1}(1-t_2)^{\varrho_3-a_3-1} dt_2 \dots$$
$$\cdot \int_0^1 t_{n-2}^{\varrho_1+\dots+\varrho_{n-2}-a_1-\dots-a_{n-2}-1}(1-t_{n-2})^{\varrho_{n-1}-a_{n-1}-1} dt_{n-2}$$
$$\cdot \int_0^1 t_{n-1}^{\varrho_1+\dots+\varrho_{n-1}-a_1-\dots-a_{n-1}-1}(1-t_{n-1})^{-a_n} \mathfrak{X}\, dt_{n-1}$$

über, wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{X} = [1+(x-1)t_1 t_2 \dots t_{n-1}]^{a_2-\varrho_1}[1+(x-1)t_2 t_3 \dots t_{n-1}]^{a_3-\varrho_2} \dots$$
$$\dots [1+(x-1)t_{n-2}t_{n-1}]^{a_{n-1}-\varrho_{n-2}}[1+(x-1)t_{n-1}]^{a_n-\varrho_{n-1}}$$

gesetzt ist. Das Integral stellt, da die Grösse $\mathfrak{X}$ für die Umgebung von

$x = 1$ und für die in Betracht kommenden Werthe von $t_1, \dots t_{n-1}$ als eine eindeutige und stetige Function von x anzusehen ist, selbst eine bei $x = 1$ eindeutige und stetige Function von x dar, vorausgesetzt, dass die Constanten α_1, ϱ_1, ... derartig sind, dass das Integral überhaupt einen Sinn hat. Denn wenn die Variable x in ihrer Ebene eine kleine geschlossene Curve um den Punkt $x = 1$ beschreibt, so behalten die Variablen $t_1, \dots t_{n-1}$ den reellen Integrationsweg zwischen 0 und 1 bei, und gleichzeitig bleibt die zu integrirende Function ungeändert. Folglich ist das Integral (102.) in dem Gebiete des Punktes $x = 1$ mehrdeutig wie die vorgenannte Potenz von $x-1$. — Wendet man auf die Factoren von $\mathfrak{X}$ den binomischen Satz an, so erhält man eine Entwickelung des Integrals (102.) nach steigenden Potenzen von $x-1$, in welcher keine anderen transcendenten Constanten, als *Euler*sche Integrale erster Gattung vorkommen.

Unter der beträchtlichen Anzahl verschiedener particulärer Integrale von (80.), die sich aus (101.) nach der obigen Bestimmung der Grenzen g_i, h_i ergeben, sind die Hauptintegrale für die Gebiete der singulären Punkte hervorzuheben. In der Umgebung des Punktes $x = 1$ existiren neben dem einzigen mehrdeutigen Hauptintegral (102.) unendlich viele daselbst eindeutige Lösungen; denn bei Integration der Differentialgleichung (80.) durch eine Reihe von der Form

$$y = k_0 + k_1(x-1) + k_2(x-1)^2 + \cdots$$

bleiben die $n-1$ ersten Coefficienten k_0, k_1, ... k_{n-2} willkürlich. Ein specielles System derartiger Integrale wird in § 13 einer Umformung unterzogen.

In der Umgebung des Punktes $x = 0$ und in dem Gebiet der grossen Werthe von x sind dagegen je n bestimmte Hauptintegrale der Gleichung (80.) vorhanden. Um diese aus (101.) zu erhalten, hat man die Grenzen g_i, h_i nach derselben Regel zu wählen, die in §§ 1, 4, 7 beobachtet wurde. Abgesehen von der soeben behandelten Beschränkung, zu welcher das Auftreten der Grenze 1 Veranlassung giebt, gilt in diesem Fall die Bestimmung, dass bei jeder der $n-1$ Integrationen für die Grenzen g_i, h_i entweder der betrachtete singuläre Punkt und die variable Grenze oder aber die beiden übrigen singulären Punkte zu setzen sind. Bei den Hauptintegralen der Umgebung von $x = 0$ sind also in (101.) die Grenzen g_{n-1} und h_{n-1} entweder gleich 0 und x oder gleich 1 und ∞, ferner für $i < n-1$ die Grenzen g_i und h_i entweder gleich 0 und v_{i+1} oder gleich 1 und ∞ zu wählen, es sei denn, dass g_i und h_i gleich 1 und v_{i+1} gesetzt werden müssen, weil

ein g_k oder h_k mit grösserem Index den Werth 1 hat. Vertauscht man in letzterer Bestimmung die zwei Werthe 0 und ∞ mit einander, so erhält man die Hauptintegrale im Bezirk der grossen Werthe von x.

Das Integral

$$(103.)\quad \int_1^{\infty} dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

in welchem Φ die Function (100.) bezeichnet, ist das einzige eindeutige Hauptintegral von (80.) im Gebiet des Punktes $x = 0$. Von den $n-1$ anderen Hauptlösungen in diesem Gebiet, die wie Potenzen mehrdeutig sind, sei zunächst dasjenige genannt, bei welchem alle oberen Grenzen variabel sind,

$$(104.)\quad \int_0^{x} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_0^{v_2} \Phi\, dv_1.$$

Die $n-2$ übrigen, die dadurch erhalten werden, dass man die Grenzen 1 und ∞ successiv für die Integrationen nach $v_1, v_2, \dots v_{n-2}$ anwendet, lassen sich durch den Ausdruck

$$(105.)\quad \int_0^{x} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{p+1}} dv_p \int_1^{\infty} dv_{p-1} \int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1$$

darstellen, in welchem für die Zahl p nach einander die Werthe $2, 3, \dots n-1$ zu setzen sind. Für $p = 2$ und $p = n-1$ soll der Ausdruck (105.) die Integrale

$$\int_0^{x} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_0^{v_3} dv_2 \int_1^{\infty} \Phi\, dv_1,$$

$$\int_0^{x} dv_{n-1} \int_1^{\infty} dv_{n-2} \int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3} \int_1^{v_{n-3}} dv_{n-4} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1$$

bezeichnen.

Die Hauptintegrale, welche zum Gebiet von $x = \infty$ gehören, werden durch die zu (103.), (104.), (105.) analogen Ausdrücke

$$(106.)\quad \int_0^{1} dv_{n-1} \int_1^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

$$(107.)\quad \int_{\infty}^{x} dv_{n-1} \int_x^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_x^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_x^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

$$(108.)\quad \int_{\infty}^{x} dv_{n-1} \int_x^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_x^{v_{p+1}} dv_p \int_0^{1} dv_{p-1} \int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1$$

angegeben. In (108.) nimmt die Zahl p wiederum die Werthe $2, 3, \dots n-1$

an. Für $p=2$ und $p=n-1$ entstehen aus (108.) die Integrale:

$$\int_\infty^x dv_{n-1}\int_\infty^{v_{n-1}} dv_{n-2}\int_\infty^{v_{n-2}} dv_{n-3}\dots\int_\infty^{v_3} dv_2\int_0^1 \Phi\, dv_1,$$

$$\int_\infty^x dv_{n-1}\int_0^1 dv_{n-2}\int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3}\int_1^{v_{n-3}} dv_{n-4}\dots\int_1^{v_2} \Phi\, dv_1.$$

Jedes der n Integrale (106.), (107.), (108.) ist mehrdeutig wie eine Potenz von x. — Man setzt bei den Integralen, die hier behandelt werden, stets voraus, dass dieselben convergent sind.

§ 13.

Die Integrale (103.) bis (108.) lassen sich auf hypergeometrische Reihen $n$ter Ordnung von der in der Einleitung angegebenen Art zurückführen. Zu diesem Behuf transformirt man die $(n-1)$-fachen Integrale durch gewisse Substitutionen, welche bei sämmtlichen $n-1$ Integrationen die Grenzen in 0 und 1 verwandeln.

In (103.) setze man

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{v_2}{v_2-t_1(v_2-1)}, \quad \dots \quad v_i = \dfrac{v_{i+1}}{v_{i+1}-t_i(v_{i+1}-1)}, \quad \dots \\ v_{n-2} = \dfrac{v_{n-1}}{v_{n-1}-t_{n-2}(v_{n-1}-1)}, \quad v_{n-1} = \dfrac{1}{1-t_{n-1}}, \end{cases}$$

d. h.

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{1-t_1t_2\dots t_{n-1}}, \quad v_2 = \dfrac{1}{1-t_2t_3\dots t_{n-1}}, \quad \dots \\ v_i = \dfrac{1}{1-t_it_{i+1}\dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \dfrac{1}{1-t_{n-1}}, \end{cases}$$

sodass für $i=1, 2, \dots n-2$

$$dv_i = \frac{t_{i+1}t_{i+2}\dots t_{n-1}\,dt_i}{(1-t_it_{i+1}\dots t_{n-1})^2}, \quad dv_{n-1} = \frac{dt_{n-1}}{(1-t_{n-1})^2}$$

ist. Dann liefert das Integral (103.) den Ausdruck

$$(-1)^{\varrho_2+\dots+\varrho_{n-1}-a_2-\dots-a_{n-1}-n}\int_0^1 dt_{n-1}\int_0^1 dt_{n-2}\dots\int_0^1 [1-x(1-t_{n-1})]^{-a_n}\Phi_1\, dt_1,$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi_1 = (1-t_{n-1})^{a_{n-1}-1}\prod_{i=1}^{i=n-1} t_i^{\varrho_1+\dots+\varrho_i-a_1-\dots-a_i-1}\prod_{i=2}^{i=n-1}(1-t_{i-1})^{\varrho_i-a_i-1}(1-t_{i-1}t_i\dots t_{n-1})^{a_i-1-\varrho_i}$$

gesetzt ist. Entwickelt man die von x abhängige Potenz nach dem binomischen Satze:

$$[1-x(1-t_{n-1})]^{-\alpha_n} = 1+\frac{\alpha_n}{1}x(1-t_{n-1})+\cdots+\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)\dots(\alpha_n+\nu-1)}{1.2\dots\nu}x^\nu(1-t_{n-1})^\nu+\cdots,$$

so sind in der für das Integral entstehenden Reihe die einzelnen Potenzen von x mit $(n-1)$-fachen constanten Integralen multiplicirt, welche die in (49.) angegebene Form haben und daher gleich einem Product von $n-1$ *Euler*schen Integralen erster Gattung sind. Man nehme in (49.)

$$m = n-1, \quad s_1 = t_{n-1}, \quad s_2 = t_{n-2}, \quad \dots \quad s_{n-1} = t_1,$$

$$k_1 = \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}, \quad k_2 = \varrho_{n-2}-\alpha_{n-2}, \quad \dots \quad k_i = \varrho_{n-i}-\alpha_{n-i}, \quad \dots \quad k_{n-1} = \varrho_1-\alpha_1,$$

$$l_1 = \nu+\alpha_{n-1}, \quad l_2 = \alpha_{n-2}-\varrho_{n-1}, \quad \dots \quad l_i = \alpha_{n-i}-\varrho_{n-i+1}, \quad \dots \quad l_{n-1} = \alpha_1-\varrho_2,$$

sodass nach (50.) für $i>1$

$$\varkappa_i = \varrho_{n-1}+\varrho_{n-2}+\cdots+\varrho_{n-i}-\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}-\cdots-\alpha_{n-i},$$

$$\lambda_i = \nu+\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}+\cdots+\alpha_{n-i}-\varrho_{n-1}-\varrho_{n-2}-\cdots-\varrho_{n-i+1},$$

$$\varkappa_{i-1}+\lambda_i = \alpha_{n-i}+\nu$$

und $\varkappa_1 = k_1 = \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}$, $\lambda_1 = l_1 = \nu+\alpha_{n-1}$ ist. Dann findet man nach Anwendung der Formel (51.) die Gleichung

$$\int_0^1 dt_{n-1}\int_0^1 dt_{n-2}\dots\int_0^1 [1-x(1-t_{n-1})]^{-\alpha_n}\Phi_1\,dt_1$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)\dots(\alpha_n+\nu-1)}{1.2\dots\nu}J_{n-1}^{(\nu)}x^\nu,$$

in welcher $J_{n-1}^{(\nu)}$ den Werth

$$J_{n-1}^{(\nu)} = E(\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1},\ \alpha_{n-1}+\nu)E(\varrho_{n-2}-\alpha_{n-2},\ \alpha_{n-2}+\nu)\dots E(\varrho_1-\alpha_1,\ \alpha_1+\nu)$$

hat. Nun ist nach (18.)

$$E(\varrho_i-\alpha_i,\ \alpha_i+\nu) = \frac{\alpha_i(\alpha_i+1)\dots(\alpha_i+\nu-1)}{\varrho_i(\varrho_i+1)\dots(\varrho_i+\nu-1)}E(\varrho_i-\alpha_i,\ \alpha_i) = \frac{[\alpha_i]_\nu^+}{[\varrho_i]_\nu^+}E(\varrho_i-\alpha_i,\ \alpha_i).$$

Schreibt man also im Integral (103.) die Function Φ in der Art, dass für $k = 2, 3, \dots n-1$

$$(v_{k-1}-v_k)^{\varrho_k-\alpha_k-1} = (-1)^{\varrho_k-\alpha_k-1}(v_k-v_{k-1})^{\varrho_k-\alpha_k-1}$$

substituirt wird, so ergiebt sich die Identität

$$(109.)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_1^\infty (v_{n-1}-x)^{-\alpha_n}v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}dv_{n-1}\int_1^{v_{n-1}}(v_{n-1}-v_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1}v_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_{n-2}}dv_{n-2}\dots\\&\qquad\cdot\int_1^{v_3}(v_3-v_2)^{\varrho_3-\alpha_3-1}v_2^{\alpha_3-\varrho_2}dv_2\int_1^{v_2}(v_2-v_1)^{\varrho_2-\alpha_2-1}v_1^{\alpha_2-\varrho_1}(v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1}dv_1\\&= E(\alpha_1,\varrho_1-\alpha_1)\dots E(\alpha_{n-1},\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1})F(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n;\varrho_1,\varrho_2,\dots\varrho_{n-1};x),\end{aligned}\right.$$

wo

$$(110.)\quad \begin{cases} F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n;\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \dots\ \varrho_{n-1};\ x) \\ = 1+\dfrac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}{1.\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n-1}}x+\dfrac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\dots\alpha_n(\alpha_n+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\dots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2+\cdots \\ = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}\dfrac{[\alpha_1]_\nu^+[\alpha_2]_\nu^+[\alpha_3]_\nu^+\dots[\alpha_n]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho_1]_\nu^+[\varrho_2]_\nu^+\dots[\varrho_{n-1}]_\nu^+}x^\nu \end{cases}$$

gesetzt ist *).

Um das Integral (104.) auf eine analoge Reihe zurückzuführen, verbindet man $v_1,\ \dots\ v_{n-1}$ mit neuen Variablen $t_1,\ \dots\ t_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$v_1 = v_2t_1,\quad v_2 = v_3t_2,\quad \dots\quad v_i = v_{i+1}t_i,\quad \dots\quad v_{n-2} = v_{n-1}t_{n-2},\quad v_{n-1} = xt_{n-1},$$

wodurch

$$v_1 = xt_1t_2\dots t_{n-1},\quad \dots\quad v_i = xt_it_{i+1}\dots t_{n-1},\quad \dots\quad v_{n-1} = xt_{n-1},$$
$$dv_i = xt_{i+1}t_{i+2}\dots t_{n-1}dt_i$$

erhalten wird. Die Grenzen für die Integrationen nach $t_1,\ \dots\ t_{n-1}$ sind wieder gleich 0 und 1. Wird von dem Factor

$$(-1)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-1}-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n+n-1}$$

abgesehen, und durch Φ_2 das Product

$$t_1^{\alpha_2-\varrho_1}(1-t_1)^{\varrho_2-\alpha_2-1}t_2^{\alpha_3-\varrho_1}(1-t_2)^{\varrho_3-\alpha_3-1}\dots t_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_1}(1-t_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1}t_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_1}(1-t_{n-1})^{-\alpha_n}$$

bezeichnet, so ergiebt sich aus (104.) der Ausdruck:

$$x^{1-\varrho_1}\int_0^1 dt_{n-1}\int_0^1 dt_{n-2}\dots\int_0^1(1-xt_1t_2\dots t_{n-1})^{\varrho_1-\alpha_1-1}\Phi_2dt_1.$$

Derselbe ist gleich der Reihe

$$Cx^{1-\varrho_1}F(\alpha_1-\varrho_1+1,\ \alpha_2-\varrho_1+1,\ \dots\ \alpha_n-\varrho_1+1;\ 2-\varrho_1,\ \varrho_2-\varrho_1+1,\ \dots\ \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ x),$$

---

*) Es dürfte zweckmässig sein, die obige Bezeichnung auch auf diejenigen analog gebildeten Reihen auszudehnen, bei denen die zweite Constantengruppe ebenso viele oder mehr Elemente enthält, als die erste. Es sei:

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_p;\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \dots\ \varrho_q;\ x)$$
$$= 1+\frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}{1.\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_q}x+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\dots\alpha_p(\alpha_p+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\dots\varrho_q(\varrho_q+1)}x^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{[\alpha_1]_\nu^+[\alpha_2]_\nu^+\dots[\alpha_p]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho_1]_\nu^+[\varrho_2]_\nu^+\dots[\varrho_q]_\nu^+}x^\nu+\cdots \text{ inf.}$$

Die positiven ganzen Zahlen p und q sind, mit Rücksicht auf die Convergenz der Reihe, der Bedingung $q \geqq p-1$ unterworfen.

wo C die Constante

$$E(\alpha_2-\varrho_1+1,\ \varrho_2-\alpha_2)E(\alpha_3-\varrho_1+1,\ \varrho_3-\alpha_3)\dots$$
$$.E(\alpha_{n-1}-\varrho_1+1,\ \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1})E(\alpha_n-\varrho_1+1,\ 1-\alpha_n)$$

bedeutet. Denn wenn die Grösse $(1-xt_1t_2\dots t_{n-1})^{\varrho_1-\alpha_1-1}$ nach dem binomischen Satz entwickelt wird, so ist in der aus dem Integral entstehenden Reihe der Factor jeder Potenz von x gleich dem Product aus $n-1$ *Euler*schen Integralen, auf welche die Formel (18.) angewendet wird.

In das Integral (105.) werden neue Variable mittelst eines Gleichungssystems eingeführt, welches zum Theil der für (103.) benutzten Substitution, zum Theil der für (104.) benutzten analog ist. Man transformirt in (105.) zunächst das $(p-1)$-fache Integral

$$\int_1^x dv_{p-1}\int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2}\int_1^{v_{p-2}} dv_{p-3}\dots\int_1^{v_2}\Phi\, dv_1$$

mittelst der Gleichungen

$$v_1=\frac{1}{1-t_1t_2\dots t_{p-1}},\quad v_2=\frac{1}{1-t_2t_3\dots t_{p-1}},\quad \dots\quad v_{p-1}=\frac{1}{1-t_{p-1}},$$

welche aus den für das Integral (103.) aufgestellten entstehen, wenn man n durch p ersetzt. Ausser den nur von v_p, v_{p+1}, $\dots$ v_{n-1}, x abhängigen Factoren der Function Φ, welche vor das $(p-1)$-fache Integral treten, und ausser einer Potenz von -1, welche Factor des Ganzen ist, findet man nach der obigen Rechnung (indem man in (103.) p statt n, v_p statt x, sowie $\alpha_i-\varrho_p+1$ und $\varrho_i-\varrho_p+1$ statt α_i und ϱ_i schreibt) das $(p-1)$-fache Integral

$$\int_0^1[1-v_p(1-t_{p-1})]^{\varrho_p-\alpha_p-1}dt_{p-1}\int_0^1 dt_{p-2}\dots\int_0^1\Phi_3 dt_1,$$

in welchem Φ_3 die Function

$$\Phi_3 = (1-t_{p-1})^{\alpha_{p-1}-\varrho_p}\prod_{i=1}^{i=p-1} t_i^{\varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_i-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_i-1}$$
$$\times\prod_{i=2}^{i=p-1}(1-t_{i-1})^{\varrho_i-\alpha_i-1}(1-t_{i-1}t_i\dots t_{p-1})^{\alpha_{i-1}-\varrho_i}$$

bezeichnet. Für $p=2$ hat Φ_3 den Werth $(1-t_1)^{\alpha_1-\varrho_2}t_1^{\varrho_1-\alpha_1-1}$. Statt v_p, v_{p+1}, $\dots$ v_{n-1} werden sodann neue Variable t_p, t_{p+1}, $\dots$ t_{n-1} durch die Gleichungen

$$v_p=xt_pt_{p+1}\dots t_{n-1},\quad v_{p+1}=xt_{p+1}t_{p+2}\dots t_{n-1},\quad \dots\quad v_{n-2}=xt_{n-2}t_{n-1},\quad v_{n-1}=xt_{n-1},$$

welche in den für die Umformung des Integrals (104.) angewendeten enthalten sind, eingeführt. Hierdurch verwandelt sich das Integral (105.) in

das Product aus $x^{1-\varrho_p}$, einer Potenz von -1, und dem $(n-1)$-fachen Integral

$$\int_0^1 dt_{n-1}\int_0^1 dt_{n-2}\dots\int_0^1 [1-x\,t_p t_{p+1}\dots t_{n-1}(1-t_{p-1})]^{\varrho_p-\alpha_p-1}\Phi_3\Phi_4 dt_1,$$

wo

$$\Phi_4 = t_p^{\alpha_{p+1}-\varrho_p}(1-t_p)^{\varrho_{p+1}-\alpha_{p+1}-1}t_{p+1}^{\alpha_{p+2}-\varrho_p}(1-t_{p+1})^{\varrho_{p+2}-\alpha_{p+2}-1}\dots$$
$$.t_{n-2}^{\alpha_{n-1}-\varrho_p}(1-t_{n-2})^{\varrho_{n-1}-\alpha_{n-1}-1}t_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_p}(1-t_{n-1})^{-\alpha_n}$$

gesetzt ist. Für $p=n-1$ reducirt sich Φ_4 auf die zwei letzten Factoren dieses Ausdrucks. Entwickelt man nun die von x abhängige Potenz nach dem binomischen Satze, so geht das letztgenannte $(n-1)$-fache Integral in die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu(\varrho_p-\alpha_p-1)_\nu H_\nu J_{p-1}^{(\nu)}x^\nu$$

über, in welcher H_ν das Product der $n-p$ *Euler*schen Integrale erster Art

$$H_\nu = E(\alpha_{p+1}-\varrho_p+\nu+1,\ \varrho_{p+1}-\alpha_{p+1})\dots$$
$$.E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+\nu+1,\ \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1})E(\alpha_n-\varrho_p+\nu+1,\ 1-\alpha_n),$$

und $J_{p-1}^{(\nu)}$ das $(p-1)$-fache Integral

$$J_{p-1}^{(\nu)} = \int_0^1 dt_{p-1}\int_0^1 dt_{p-2}\dots\int_0^1 (1-t_{p-1})^\nu\Phi_3 dt_1$$

bedeutet. Aber in H_ν ist nach (18.) die von ν unabhängige Grösse

$$E(\alpha_{p+1}-\varrho_p+1,\ \varrho_{p+1}-\alpha_{p+1})\dots E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+1,\ \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1})E(\alpha_n-\varrho_p+1,\ 1-\alpha_n)$$

mit dem Ausdruck

$$\frac{[\alpha_{p+1}-\varrho_p+1]_\nu^+}{[\varrho_{p+1}-\varrho_p+1]_\nu^+}\dots\frac{[\alpha_{n-1}-\varrho_p+1]_\nu^+}{[\varrho_{n-1}-\varrho_p+1]_\nu^+}\frac{[\alpha_n-\varrho_p+1]_\nu^+}{[2-\varrho_p]_\nu^+}$$

multiplicirt, und die Gleichung (51.) liefert, wenn daselbst

$$m=p-1,\quad s_1=t_{p-1},\quad s_2=t_{p-2},\quad\dots\quad s_{p-1}=t_1,$$
$$k_1=\varrho_{p-1}-\alpha_{p-1},\quad k_2=\varrho_{p-2}-\alpha_{p-2},\quad k_3=\varrho_{p-3}-\alpha_{p-3},\quad\dots\quad k_{p-1}=\varrho_1-\alpha_1,$$
$$l_1=\alpha_{p-1}-\varrho_p+\nu+1,\quad l_2=\alpha_{p-2}-\varrho_{p-1},\quad l_3=\alpha_{p-3}-\varrho_{p-2},\quad\dots\quad l_{p-1}=\alpha_1-\varrho_2$$

gesetzt wird, für das Integral $J_{p-1}^{(\nu)}$ den Werth:

$$J_{p-1}^{(\nu)} = \prod_{i=1}^{i=p-1}E(\alpha_i-\varrho_p+\nu+1,\ \varrho_i-\alpha_i)$$
$$= \frac{[\alpha_1-\varrho_p+1]_\nu^+}{[\varrho_1-\varrho_p+1]_\nu^+}\dots\frac{[\alpha_{p-1}-\varrho_p+1]_\nu^+}{[\varrho_{p-1}-\varrho_p+1]_\nu^+}\prod_{i=1}^{i=p-1}E(\alpha_i-\varrho_p+1,\ \varrho_i-\alpha_i).$$

Auf diese Weise gelangt man zu der Gleichung

$$(111.)\quad \begin{cases} \int_0^x dv_{n-1}\int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2}\dots\int_0^{v_{p+1}} dv_p\int_1^{\infty} dv_{p-1}\int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2}\dots\int_1^{v_2}\Phi\, dv_1 \\ = C'x^{1-\varrho_p}F\begin{pmatrix} \alpha_1-\varrho_p+1,\ \alpha_2-\varrho_p+1,\ \alpha_3-\varrho_p+1,\ \dots\ \alpha_n-\varrho_p+1; \\ \varrho_1-\varrho_p+1,\ \dots\ \varrho_{p-1}-\varrho_p+1,\ 2-\varrho_p,\ \varrho_{p+1}-\varrho_p+1,\ \dots \\ \varrho_{n-1}-\varrho_p+1;\ x \end{pmatrix}, \end{cases}$$

in welcher F das in (110.) definirte Functionszeichen ist, und C' die Constante

$$(-1)^{\varrho_2+\dots+\varrho_{p-1}+\varrho_{p+1}+\dots+\varrho_{n-1}-\alpha_2-\dots-\alpha_{p-1}-\alpha_{p+1}-\dots-\alpha_n+n-1}E(\alpha_1-\varrho_p+1,\ \varrho_1-\alpha_1)\dots$$
$$.E(\alpha_{p-1}-\varrho_p+1,\ \varrho_{p-1}-\alpha_{p-1})E(\alpha_{p+1}-\varrho_p+1,\ \varrho_{p+1}-\alpha_{p+1})\dots$$
$$.E(\alpha_{n-1}-\varrho_p+1,\ \varrho_{n-1}-\alpha_{n-1})E(\alpha_n-\varrho_p+1,\ 1-\alpha_n)$$

bedeutet.

Aehnliche Transformationen führen zu der Entwickelung der Integrale (106.), (107.), (108.) nach fallenden Potenzen von x. Substituirt man in (106.)

$$v_1 = 1-t_1t_2\dots t_{n-1},\quad \dots\quad v_i = 1-t_it_{i+1}\dots t_{n-1},\quad \dots\quad v_{n-1} = 1-t_{n-1},$$

so ergiebt sich nach Anwendung des binomischen Satzes und der Formel (51.), dass das Integral (106.) mit der Reihe

$$\text{Const. } x^{-\alpha_n}F\Big(\alpha_n,\ \alpha_n-\varrho_1+1,\ \dots\ \alpha_n-\varrho_{n-1}+1;\ \alpha_n-\alpha_1+1,\ \dots\ \alpha_n-\alpha_{n-1}+1;\ \frac{1}{x}\Big)$$

identisch ist. Das Integral (107.) liefert, nachdem man

$$v_1 = \frac{x}{t_1t_2\dots t_{n-1}},\quad \dots\quad v_i = \frac{x}{t_it_{i+1}\dots t_{n-1}},\quad \dots\quad v_{n-1} = \frac{x}{t_{n-1}}$$

gesetzt hat, die Entwickelung:

$$\text{Const. } x^{-\alpha_1}F\Big(\alpha_1,\ \alpha_1-\varrho_1+1,\dots\ \alpha_1-\varrho_{n-1}+1;\ \alpha_1-\alpha_2+1,\ \alpha_1-\alpha_3+1,\dots\ \alpha_1-\alpha_n+1;\ \frac{1}{x}\Big).$$

In (108.) führt man zuerst die Variablen $t_1, \dots t_{p-1}$ durch die Gleichungen

$$v_1 = 1-t_1t_2\dots t_{p-1},\quad v_2 = 1-t_2t_3\dots t_{p-1},\quad \dots\quad v_{p-1} = 1-t_{p-1}$$

ein, sodann die Variablen $t_p, t_{p+1}, \dots t_{n-1}$ durch die Gleichungen:

$$v_p = \frac{x}{t_pt_{p+1}\dots t_{n-1}},\quad v_{p+1} = \frac{x}{t_{p+1}t_{p+2}\dots t_{n-1}},\quad \dots\quad v_{n-1} = \frac{x}{t_{n-1}}.$$

Wie bei den vorhergehenden Integralen wird der einzige von x abhängige Factor der zu integrirenden Function nach dem binomischen Satze entwickelt, worauf man mit Hülfe der Formeln (18.) und (51.) das Integral

(108.) gleich dem Ausdruck

$$\text{Const. } x^{-\alpha_p} F\begin{pmatrix} \alpha_p, & \alpha_p-\varrho_1+1, & \alpha_p-\varrho_2+1, & \dots & \alpha_p-\varrho_{n-1}+1; \\ \alpha_p-\alpha_1+1, & \dots & \alpha_p-\alpha_{p-1}+1, & \alpha_p-\alpha_{p+1}+1, & \dots & \alpha_p-\alpha_n+1; & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

findet.

Im § 4 wurde gezeigt, dass das (als convergent vorausgesetzte) Integral (32.), dessen Grenzen gleich 0 und ∞ sind, eine in der Umgebung des Punktes $x = 1$ eindeutige und stetige particuläre Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung (14.) darstellt, sobald die Grösse V der Gleichung (12.) genügt. Für die Differentialgleichung $n$ter Ordnung gilt ein analoger Satz. Der Ausdruck

$$(112.) \qquad \int_0^\infty (t-x)^{-\alpha_n} t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}-1} T\,dt,$$

der, wie sich aus §§ 9—11 ergiebt, die Differentialgleichung (80.) befriedigt, ist, während T ein beliebiges particuläres Integral von (85.) bedeutet, in der Umgebung des Punktes $x = 1$ eine eindeutige und stetige Function von x. Es sollen für T nach einander $n-1$ verschiedene particuläre Lösungen eingesetzt werden, welche zusammen das vollständige Integral der Differentialgleichung (85.) ausmachen. Indem man zeigt, dass in jedem dieser $n-1$ Fälle das Integral (112.) bei $x = 1$ eindeutig und stetig bleibt, ist die Behauptung allgemein bewiesen. Man wählt als die $n-1$ Functionen, welche in (112.) für T substituirt werden, die Hauptintegrale von (85.) in der Umgebung von $t = 0$, d. h. die zu (103.), (104.), (105.) analogen $(n-2)$-fachen bestimmten Integrale. Dann erhält man aus (112.), nachdem wieder v_{n-1} statt t geschrieben ist, die folgenden Ausdrücke

$$(113.) \qquad \int_0^\infty dv_{n-1} \int_1^\infty dv_{n-2} \int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3} \int_1^{v_{n-3}} dv_{n-4} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

$$(114.) \qquad \int_0^\infty dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \int_0^{v_{n-3}} dv_{n-4} \dots \int_0^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

$$(115.) \qquad \int_0^\infty dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{p+1}} dv_p \int_1^\infty dv_{p-1} \int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_1^{v_2} \Phi\, dv_1,$$

in denen Φ die Function (100.) bezeichnet. In (115.) nimmt p die Werthe 2, 3, ... $n-2$ an, und zwar sind im Fall $p = 2$ die Grenzen 1 und ∞ für die Integration nach v_1 anzuwenden. — Als Integrationsweg für die Variable v_{n-1} möge in (113.), (114.), (115.) die negative reelle Axe ge-

wählt werden; die nämliche Bestimmung wurde im § 4 für die letzte Integration in den Doppelintegralen (26.) und (32.) getroffen. Verbindet man v_{n-1} mit einer neuen Variable t_{n-1} durch die Gleichung $v_{n-1} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-1}-1}$, so durchläuft t_{n-1} die reellen Werthe zwischen 0 und 1.

Es werde zunächst das Integral (114.) mittelst der Substitution

$$\frac{v_1}{v_1-1} = t_1\frac{v_2}{v_2-1}, \quad \frac{v_2}{v_2-1} = t_2\frac{v_3}{v_3-1}, \quad \dots \quad \frac{v_{n-2}}{v_{n-2}-1} = t_{n-2}\frac{v_{n-1}}{v_{n-1}-1},$$

$$\frac{v_{n-1}}{v_{n-1}-1} = t_{n-1}$$

umgeformt, welche für $v_1, \dots v_{n-1}$ die Werthe

$$v_1 = \frac{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}{t_1 t_2 \dots t_{n-1}-1}, \quad \dots \quad v_i = \frac{t_i t_{i+1} \dots t_{n-1}}{t_i t_{i+1} \dots t_{n-1}-1}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-1}-1}$$

liefert. Man erhält hierdurch aus (114.), abgesehen von einer als Factor auftretenden Potenz von -1, den Ausdruck

$$\int_0^1 dt_{n-1}\int_0^1 dt_{n-2}\dots\int_0^1 [1+(x-1)(1-t_{n-1})]^{-\alpha_n}\Phi_5 dt_1,$$

in welchem Φ_5 die Function

$$\Phi_5 = t_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_1}(1-t_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}\prod_{k=2}^{k=n-1} t_{k-1}^{\alpha_k-\varrho_1}(1-t_{k-1})^{\varrho_k-\alpha_k-1}(1-t_{k-1}t_k\dots t_{n-1})^{\alpha_{k-1}-\varrho_k}$$

bedeutet. Es wird (wie bei allen hier betrachteten Integralen) vorausgesetzt, dass die Constanten α_1, ϱ_1, ... diejenigen Ungleichheiten erfüllen, welche dem Integral einen bestimmten Sinn verleihen. Wenn nun die Variable x in ihrer Ebene eine kleine geschlossene Curve um den Punkt 1 beschreibt, so tritt weder bei der obigen von x abhängigen Potenz eine Aenderung ein (da ihre Basis sich wenig von der Eins unterscheidet), noch modificiren sich die Integrationswege von t_1, t_2, ... t_{n-1} in irgend einer Weise. Auch wird das Integral für $x = 1$ nicht unendlich. Demnach ist dasselbe in der Umgebung des Punktes $x = 1$ eine eindeutige und stetige Function von x.

Der gleiche Schluss ist auf die Integrale (113.) und (115.) anwendbar, da dieselben eine ähnliche Transformation gestatten. Die Rechnung für (113.) kann auf die für (115.), indem man $p = n-1$ setzt, reducirt werden. Bei dem Integral (115.) verbindet man, wie bei (105.), die Variablen $v_1, v_2, \dots v_{p-1}$ mit neuen Variablen $t_1, t_2, \dots t_{p-1}$ durch die Gleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{1-t_1 t_2\dots t_{p-1}}, \quad \dots \quad v_i = \frac{1}{1-t_i t_{i+1}\dots t_{p-1}}, \quad \dots \quad v_{p-1} = \frac{1}{1-t_{p-1}}.$$

Ferner führt man die Variablen $t_p,\ t_{p+1},\ \dots\ t_{n-1}$ durch die Relationen

$$v_p = \frac{t_p t_{p+1} \dots t_{n-1}}{t_p t_{p+1} \dots t_{n-1} - 1}, \quad \dots \quad v_k = \frac{t_k t_{k+1} \dots t_{n-1}}{t_k t_{k+1} \dots t_{n-1} - 1}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-1} - 1}$$

ein. Hierdurch verwandelt sich, wenn wieder von einem constanten Factor, der gleich einer Potenz von -1 ist, abgesehen wird, das Integral (115.) in das folgende

$$\int_0^1 dt_{n-1} \int_0^1 dt_{n-2} \dots \int_0^1 [1+(x-1)(1-t_{n-1})]^{-a_n} (1-t_{n-1})^{a_{n-1}-1} \Phi_6 \Phi_7 dt_1,$$

woselbst durch Φ_6 und Φ_7 die Functionen

$$\Phi_6 = (1-t_{p-1})^{a_{p-1}-\varrho_p} \prod_{k=1}^{k=p-1} t_k^{\varrho_1+\dots+\varrho_k-a_1-\dots-a_k-1}$$
$$\times \prod_{k=2}^{k=p-1} (1-t_{k-1})^{\varrho_k-a_k-1} (1-t_{k-1} t_k \dots t_{p-1})^{a_{k-1}-\varrho_k},$$

$$\Phi_7 = (1-t_{p-1} t_p \dots t_{n-1})^{\varrho_p-a_p-1} \prod_{k=p}^{k=n-1} t_k^{a_{k+1}-\varrho_p}$$
$$\times \prod_{k=p+1}^{k=n-1} (1-t_{k-1})^{\varrho_k-a_k-1} (1-t_{k-1} t_k \dots t_{n-1})^{a_{k-1}-\varrho_k}$$

bezeichnet werden. Für $p = 2$ ist die Function Φ_6 durch

$$(1-t_1)^{a_1-\varrho_2} t_1^{\varrho_1-a_1-1}$$

zu ersetzen. Für $p = n-1$ geht das obige Integral in (113.) über, wenn gleichzeitig Φ_7 gleich der Function

$$(1-t_{n-2} t_{n-1})^{\varrho_{n-1}-a_{n-1}-1} t_{n-1}^{a_n-\varrho_{n-1}}$$

genommen wird. Man erkennt, dass, wenn die Variable x eine kleine Curve um den Punkt 1 beschreibt, sich auch hier weder die zu integrirende Function, noch die Integrationswege ändern.

Es soll diesen Betrachtungen nur noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass, wenn man in das Integral (112.) für T successiv die $n-1$ Hauptintegrale von (85.) für das Gebiet von $t = \infty$ substituirt, die vorstehende Rechnung mit gewissen Modificationen gültig bleibt, wie für $n = 3$ bereits im § 4 gezeigt wurde. Man darf in (113.), (114.), (115.) den Werth 0 überall durch ∞, sowie den Werth ∞ durch 0 ersetzen; nur sind dann statt der für (114.) und (115.) angegebenen Substitutionsgleichungen die folgenden

$$v_1 = \frac{t_1 t_2 \dots t_{n-1} - 1}{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_i = \frac{t_i t_{i+1} \dots t_{n-1} - 1}{t_i t_{i+1} \dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \frac{t_{n-1} - 1}{t_{n-1}},$$

respective

$$v_1 = 1-t_1t_2\dots t_{p-1}, \quad \dots \quad v_i = 1-t_it_{i+1}\dots t_{p-1}, \quad \dots \quad v_{p-1} = 1-t_{p-1},$$

$$v_p = \frac{t_pt_{p+1}\dots t_{n-1}-1}{t_pt_{p+1}\dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_k = \frac{t_kt_{k+1}\dots t_{n-1}-1}{t_kt_{k+1}\dots t_{n-1}}, \quad \dots \quad v_{n-1} = \frac{t_{n-1}-1}{t_{n-1}}$$

anzuwenden. Die Eindeutigkeit des Ausdrucks (112.) im Bereich des Punktes $x=1$ ergiebt sich auch in diesen Fällen direct aus der Form der bestimmten Integrale.

Kiel, im Februar 1886.

Zur geometrischen Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *J. Cardinaal* zu Tilburg in Holland.)

1. Aus der Theorie des F^2-Gebüsches und des dazu projectivischen räumlichen Gebildes leitet Herr *Th. Reye* die Entstehung ebener Curven vierter Ordnung aus zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln ab *). Dagegen beweist Herr *W. Fiedler*, dass alle ebenen Curven vierter Ordnung, deren Geschlecht nicht Eins übersteigt, durch Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art construirt werden können **). Die erste Construction zeigt die grösste Aehnlichkeit mit der der ebenen Curven dritter Ordnung aus einem Kegelschnittbüschel und einem mit diesem projectivischen Strahlenbüschel; durch die zweite treten mit grosser Klarheit die verschiedenen Formen der Curven ans Licht. Zweck dieser Arbeit ist es nun, aus der ersten Entstehungsweise einige Eigenschaften und Constructionen der Curven vierter Ordnung herzuleiten, diese speciell auf die Curven vom Geschlecht Eins oder Null anzuwenden, um nachher auf dem Wege der Construction zu der zweiten Entstehungsweise und den daraus folgenden Constructionen zu gelangen.

2. Es mögen hier zunächst die Fundamentalsätze, aus denen die erste Entstehungsweise sich ergiebt, in die zu diesem Zwecke passende Form gebracht werden. Wenn man jeder Fläche eines F^2-Gebüsches Σ die Polarebene eines festen Punktes zuweist, so entsteht ein räumliches System Σ_1, das zu dem Gebüsche projectivisch und so beschaffen ist, dass jeder seiner Ebenen eine Fläche, jeder seiner Geraden eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art und jedem seiner Punkte eine Gruppe von acht

*) *Th. Reye.* Geometrie der Lage, zweite Auflage II. S. 244.

**) *W. Fiedler.* Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, dritte Auflage II. S. 25, 26, 45, 46.



associirten Punkten des Gebüsches entspricht. Einer Geraden l von Σ entspricht in Σ_1 ein Kegelschnitt in der Ebene, die der durch l gehenden Fläche von Σ entspricht.

Man denke sich weiter in dem Systeme Σ_1 eine Fläche zweiter Ordnung L_1^2. Ihr entspricht in Σ eine Fläche L^4, die mit einer Geraden l eben so viele Punkte gemein hat wie L_1^2 mit dem entsprechenden Kegelschnitt in Σ_1, also von der vierten Ordnung ist.

3. Es sei nun die Fläche L_1^2 entstanden aus zwei projectivischen Ebenenbüscheln mit den Axen a_1 und b_1; diesen Ebenenbüscheln entsprechen in Σ zwei projectivische F^2-Büschel, und L^4 wird erzeugt durch den Schnitt von den homologen Flächen derselben. Die Ebenen durch a_1 schneiden L_1^2 in den Geraden der Regelschaar, deren Leitlinien a_1 und b_1 sind, und aus einem Punkte Q_1 von L_1^2 kann eine Gerade c_1 gezogen werden, die alle diese Geraden schneidet; sie ist eine neue Leitlinie der Regelschaar; der Uebergang zu der entsprechenden Construction in Σ giebt den Satz:

Jede Fläche zweiter Ordnung durch die Grundcurve a von L^4 schneidet L^4 noch in einer zweiten Raumcurve vierter Ordnung *). Construirt man durch einen Punkt Q von L^4 Flächen zweiter Ordnung, welche diese Raumcurven enthalten, so schneiden diese L^4 in einer einzigen Raumcurve vierter Ordnung c; ausser Q enthält diese alle mit Q associirten Punkte. Der Büschel dieser Flächen ist projectivisch zu dem Büschel a; L^4 kann also auch erzeugt werden durch die projectivischen Büschel, deren Grundcurven a und c sind. Oder:

Wird auf der Fläche vierter Ordnung L^4 eine Raumcurve vierter Ordnung als Grundcurve eines F^2-Büschels angenommen, so bestimmt jeder beliebige Punkt auf L^4 eine neue Grundcurve eines F^2-Büschels, der, projectivisch auf den ersten bezogen, die Fläche L^4 erzeugt.

Es ist ersichtlich, dass auf diese Weise zwei Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung auf L^4 entstehen; zwei beliebige Grundcurven derselben Schaar können als Grundcurven der erzeugenden Büschel betrachtet werden; durch zwei Grundcurven von verschiedenen Schaaren kann eine Fläche zweiter Ordnung gelegt werden.

Da weiter zwei F^2-Büschel immer als zum nämlichen Gebüsche

---

*) Da die Raumcurven vierter Ordnung in diesen Betrachtungen alle erster Art sind, so wird fortan der Zusatz „erster Art“ ausgelassen.

gehörend betrachtet werden können, so ist die Erzeugungsweise von L^4 eine durchaus allgemeine.

4. Wir schneiden L^4 durch eine Ebene α. Der Schnitt bildet eine ebene Curve vierter Ordnung C_4; die Grundcurve des Büschels schneidet α in den vier Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels; wählen wir den Punkt Q auf C_4, sò ergiebt sich:

Die ebene Curve C_4 wird erzeugt durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel, deren Grundpunkte zu der Curve gehören. Jeder Kegelschnitt des ersten Büschels schneidet C_4 in noch vier Punkten. Construirt man Kegelschnitte je durch Q und diese weiteren Schnittpunkte, so schneiden diese Kegelschnitte sich in noch drei festen Punkten auf der Curve. Jeder beliebige Punkt Q kann also als einer der Grundpunkte des zweiten Kegelschnittbüschels gewählt werden; dieser ist projectivisch zum ersten und erzeugt mit ihm durch den Schnitt ihrer homologen Kegelschnitte die Curve C_4. Auf C_4 befinden sich zwei Schaaren von Gruppen associirter Punkte; zwei Gruppen derselben Schaar können als Grundpunkte der erzeugenden Büschel betrachtet werden, durch zwei Gruppen von verschiedenen Schaaren kann ein Kegelschnitt gelegt werden. Jedes Paar projectivischer Kegelschnittbüschel kann die Curve erzeugen; diese Kegelschnittbüschel gehören alle zu einem linearen Kegelschnittsystem dritter Stufe.

Es ist ferner ersichtlich, dass die Grundpunkte der erzeugenden Büschel eben so wohl reell als imaginär sein können, da die Ebene α die Grundcurven der F^2-Büschel in reellen und in imaginären Punkten schneiden kann; die Sätze und Constructionen, die für reelle Grundpunkte gelten, können also auf imaginäre Grundpunkte übertragen werden. Nach dieser allgemeinen Bemerkung wird nur gelegentlich auf diesen Unterschied hingewiesen werden.

Auch die Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten werden durch diese Erzeugungsweise definirt. Wenn nämlich alle Flächen des Gebüsches einen Punkt oder mehrere Punkte mit einander gemein haben, so sind diese Punkte Knotenpunkte von L^4. Die Ebene α kann durch einen, zwei oder drei dieser Knotenpunkte gelegt werden, und auf diese Weise entstehen Curven vierter Ordnung mit einem, zwei oder drei Doppelpunkten. Die Kegelschnitte der Systeme dritter Stufe, zu welchen die erzeugenden Büschel gehören, besitzen in diesem Falle auch dieselbe Anzahl gemeinschaftlicher Punkte; wenn α durch drei gemeinschaftliche Punkte gelegt

wird, ist noch zu beachten, dass das Kegelschnittsystem zu einem Kegelschnittnetz wird, da α selbst einen Theil einer der Flächen des Gebüsches bildet.

Schliesslich können auch die gemeinschaftlichen Punkte des Gebüsches reell oder in Gruppen zu je zwei imaginär sein; dasselbe wird auf die Curven vierter Ordnung übertragen.

5. Aus der angegebenen Erzeugungsweise der ebenen Curven vierter Ordnung ergeben sich einige Constructionen, bei deren Ausführung als Bestimmungselemente der Curve stets gegeben gedacht werden zwei projectivisch auf einander bezogene Kegelschnittbüschel k_1 und k_2. Die hier folgenden Constructionen werden stets zurückgeführt auf die Construction von vier gemeinschaftlichen Punkten oder Tangenten von zwei Kegelschnitten.

a. Die Schnittpunkte einer Geraden l mit der Curve zu bestimmen.

Die angedeutete Zurückführung kann auf folgende Weise geschehen.

Es seien $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ und $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ drei homologe Punktepaare der beiden Involutionen, in denen l von den beiden Büscheln geschnitten wird. Zur Bestimmung der gemeinschaftlichen homologen Punkte beider construire man einen Kegelschnitt K_2, der l berührt und ein Kreis sein kann. Man construire weiter die Schnittpunkte P_1, Q_1, R_1 der Tangenten aus $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ an K_2; diese liegen auf einer Geraden l_1; ebenso construire man auf l_2 die Schnittpunkte P_2, Q_2, R_2 der Tangenten aus $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$. Bei fortgesetztem Verfahren entstehen auf l_1 und l_2 zwei projectivische Punktreihen $P_1Q_1R_1\ldots$ und $P_2Q_2R_2\ldots$. Die Verbindungslinien der homologen Punkte umhüllen einen Kegelschnitt K'_2, der mit K_2 vier gemeinschaftliche Tangenten bestimmt. Die Treffpunkte dieser Tangenten mit l sind die Schnittpunkte von l mit C_4. Die Construction wird zweiten Grades, wenn l zwei gegebene Punkte verbindet; hieraus folgt:

Die Punkte von C_4 können durch Constructionen zweiten Grades bestimmt werden; denn man kann, zur Bestimmung von zwei Punkten, erstens eine Gerade durch zwei der Grundpunkte wählen, und weiter jeden construirten Punkt nach Belieben mit einem der Grundpunkte verbinden.

b. Die Schnittpunkte von C_4 mit einem Kegelschnitt K_2 zu bestimmen, der zwei der Grundpunkte des ersten sowie des zweiten erzeugenden Büschels enthält.

Es sei der Kegelschnitt gelegt durch die Punkte A_1B_1 von k_1 und

A_2B_2 von k_2. Die Kegelschnitte des Büschels k_1 bestimmen auf K_2 je zwei Punkte, deren Verbindungslinien einen zum Kegelschnittbüschel projectivischen Strahlenbüschel bilden; ebenso die Kegelschnitte von k_2. Die beiden also entstandenen projectivischen Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, dessen Schnittpunkte mit K_2 übereinstimmen mit den Schnittpunkten von K_2 mit C_4.

Man folgert aus dieser hierdurch auf das Hauptproblem zurückgeführten Construction:

Jeder Kegelschnitt, der zwei Grundpunkte von je zwei Gruppen derselben Schaar enthält, schneidet die Curve vierter Ordnung in noch vier Punkten, die reell oder in Gruppen zu je zwei conjugirt imaginär sind; jedenfalls werden, auf zwei immer reellen gemeinschaftlichen Secanten, die Schnittpunkte durch Involutionen vertreten.

c. Die Schnittpunkte von C_4 mit einem Kegelschnitt K_2 zu bestimmen, der drei Grundpunkte des Kegelschnittbüschels k_1 und einen Grundpunkt des Büschels k_2 enthält.

Es sei K_2 gelegt durch die Punkte $A_1B_1C_1$ von k_1 und A_2 von k_2. Die Kegelschnitte von k_1 bestimmen auf K_2 eine mit k_1 und also auch mit k_2 projectivische krumme Punktreihe, die, aus dem Punkte A_1 von K_2 projicirt, einen Strahlenbüschel liefert, der mit k_2 eine ebene Curve dritter Ordnung C_3 erzeugt. Die Schnittpunkte von C_3 mit K_2 sind identisch mit den Schnittpunkten von C_4 und K_2; von diesen Punkten sind zwei bekannt, A_1 und A_2; also schneidet K_2 die Curve C_4 in noch vier Punkten. Die Bestimmung dieser vier Punkte kann auf Construction *b.* zurückgeführt werden. Man wähle dazu A_1, A_2 und noch zwei beliebige Punkte von C_3 als Grundpunkte des sie erzeugenden Kegelschnittbüschels, bestimme nach den Constructionsmethoden der Curven dritter Ordnung *) das Centrum des mit diesem correspondirenden Strahlenbüschels, und es ist ersichtlich, dass ein besonderer Fall der vorigen Construction eintritt. Auch in diesem Falle entstehen also vier Schnittpunkte, bezüglich deren Realität die Bemerkung der Construction *b.* wiederholt werden kann.

d. Die Schnittpunkte von C_4 mit einer Curve dritter Ordnung C_3 zu bestimmen, welche die acht angenommenen Grundpunkte enthält.

Jeder der Kegelschnittbüschel k_1 und k_2 bestimmt auf C_3 einen mit

*) *Reye,* G. d. L. II, 210.

ihm projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt auf C_3 gelegen ist. Beide Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, dessen Schnittpunkte mit C_3 übereinstimmen mit den Schnittpunkten von C_3 und C_4. Also ist auch diese Construction ein besonderer Fall von *b.*

6. Bei den folgenden Problemen wird als bekannt angenommen, dass jede Curve dritter Ordnung mit einem Kegelschnitt höchstens sechs Punkte und mit einer anderen Curve dritter Ordnung höchstens neun Punkte gemein hat.

a. Die Zahl der Schnittpunkte einer Curve vierter Ordnung C_4 mit einem durch zwei Grundpunkte A_1 und B_1 des Büschels k_1 gelegten Kegelschnitt K_2 zu bestimmen.

Der Büschel k_1 bestimmt mit K_2 einen zu ihm projectivischen Strahlenbüschel, der mit dem Büschel k_2 eine Curve dritter Ordnung C_3 erzeugt; die sechs Schnittpunkte von C_3 und K_2 sind zugleich die Schnittpunkte von K_2 und C_4.

b. Die Zahl der Schnittpunkte einer Curve vierter Ordnung C_4 mit einer durch die vier Grundpunkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ des Büschels k_1 gelegten Curve dritter Ordnung C_3 zu bestimmen.

Der Büschel k_1 bestimmt mit C_3 einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt M auf C_3 liegt; dieser Büschel erzeugt mit dem Büschel k_2 eine Curve C_3', die ausser M noch acht Punkte mit C_3 gemein hat. Diese acht Punkte sind die weiteren Schnittpunkte von C_3 mit C_4.

7. Bei jeder dieser Aufgaben kann der Fall eintreten, dass die Gerade l, der Kegelschnitt K_2 oder die Curve dritter Ordnung C_3 mehr Punkte mit der Curve vierter Ordnung C_4 gemein hat als die aus der Construction sich ergebenden. Wenn dies stattfindet, so haben l, K_2 oder C_3 eine unendliche Anzahl Punkte mit C_4 gemein, sie bilden einen Theil dieser Curve, welche also in zwei Curven niedrigerer Ordnung zerfällt. Bei der Geraden l ergiebt sich dies aus dem Zusammenfallen von K_2 und K_2', die fünf und folglich unendlich viele Tangenten gemein haben; bei dem Kegelschnitt K_2 von 6. *a.* aus dem Zusammenfallen von K_2 mit einem Theile der Hülfscurve C_3, die in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt; bei der kubischen Curve C_3 von 6. *b.* aus dem Zusammenfallen von C_3 und C_3', die mehr als neun Punkte gemein haben*). Also ergeben sich die Sätze:

*) *Reye,* G. d. L. II. 206.

Wenn eine Gerade mehr als vier Punkte mit einer Curve C_4 gemein hat, so zerfällt letztere in die Gerade und eine Curve dritter Ordnung.

Wenn ein durch zwei Grundpunkte eines der erzeugenden Büschel gelegter Kegelschnitt mehr als acht Punkte mit der Curve vierter Ordnung C_4 gemein hat, so zerfällt letztere in K_2 und einen Kegelschnitt.

Wenn eine durch vier Grundpunkte eines der erzeugenden Büschel gelegte kubische ebene Curve C_3 mehr als zwölf Punkte mit der Curve C_4 gemein hat, so zerfällt letztere in C_3 und eine Gerade.

8. Legt man einen Kegelschnitt K_2 des erzeugenden Büschels k_1 durch den Grundpunkt A_2 des Büschels k_2, so ist die Tangente des mit diesem homologen Kegelschnittes von k_2 zugleich eine Tangente von C_4; die Sehne, die A_2 mit dem einen der Schnittpunkte von zwei homologen Kegelschnitten von k_1 und k_2 verbindet, ist nämlich zugleich eine Sehne des Kegelschnittes von k_2 und von C_4 und wird im genannten Falle zur gemeinschaftlichen Tangente. Fallen nun die Punkte A_1 und A_2 zusammen in A, so können von jedem Büschel unendlich viele Kegelschnitte construirt werden, welche durch A gehen, also auch unendlich viele Gerade durch A gezogen werden, die zwei in A zusammenfallende Punkte mit C_4 gemein haben, d. h. A ist ein Doppelpunkt. Die Tangenten in A an den Kegelschnitten von k_1 und k_2 bilden zwei projectivische Strahlenbüschel, die im Allgemeinen zwei Doppelstrahlen besitzen; diese sind gemeinschaftliche Tangenten homologer Kegelschnitte von k_1 und k_2 und bilden die beiden Tangenten des Doppelpunktes. Je nachdem sie reell verschieden, zusammenfallend oder conjugirt imaginär sind, ist A ein Doppelpunkt, eine Spitze, oder ein isolirter Punkt.

9. Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns zu den Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins oder Null und machen die Bemerkung, dass sie nach dem Vorigen aus zwei Kegelschnittbüscheln mit zwei oder drei zusammenfallenden Grundpunkten erzeugt werden können; auch die den Aufgaben von 5. und 6. entsprechenden Constructionen können auf sie angewendet werden. Da ein Doppelpunkt zwei Schnittpunkte vertritt, so entstehen hieraus die folgenden Aufgaben zweiten Grades, an welche correspondirende Aufgaben ersten Grades leicht anzuknüpfen sind.

a. Die Schnittpunkte der Curve C_4 mit einer Geraden l durch ihren Doppelpunkt zu construiren.

b. Die Schnittpunkte einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppel-

punkten und eines Kegelschnitts durch die drei Doppelpunkte, oder einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und eines Kegelschnitts durch die zwei Doppelpunkte und noch zwei Punkte der Curve zu construiren.

c. Die Schnittpunkte einer Curve vierter Ordnung C_4 mit drei Doppelpunkten A, B, C und einer durch A, B, C, die übrigen zwei Grundpunkte und noch zwei Punkte von C_4 gelegten Curve dritter Ordnung zu construiren; oder einer Curve C_4 mit zwei Doppelpunkten A, B und einer durch A, B, die vier übrigen Grundpunkte und noch zwei Punkte von C_4 gelegten Curve dritter Ordnung.

10. Die aus der Erzeugung von Flächen vierter Ordnung entspringende Erzeugung von ebenen Curven vierter Ordnung durch projectivische Kegelschnittbüschel giebt als Bedingung für zwei erzeugende Punktgruppen, dass sie Gruppen associirter Punkte von zwei Büscheln eines linearen Kegelschnittsystems dritter Stufe sein müssen. Besitzt nun eine gegebene Curve C_4 zwei Doppelpunkte A, B, so sind diese gemeinschaftliche Punkte des zu C_4 gehörenden Systems, und da sie mit je zwei Punkten C, D der Curve eine Gruppe associirter Punkte bilden, so ergiebt sich, dass der erste der erzeugenden Büschel bestimmt ist durch A, B und noch zwei beliebige Punkte C_1, D_1 von C_4. Ein Kegelschnitt des Büschels ABC_1D_1 schneidet nun die Curve in noch zwei Punkten E, F (6. *a.*). Von dem zweiten der erzeugenden Büschel kann also noch ein Punkt C_2 beliebig angenommen werden; der zweite D_2 wird bestimmt als letzter Schnittpunkt des Kegelschnitts ABC_2EF mit C_4. Für die Curven vierter Ordnung mit drei oder zwei Doppelpunkten ergeben sich hieraus Sätze, die verwendet werden können, um die Curven aus gegebenen Punkten zu construiren, nämlich:

In einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten A, B, C können die vierten Grundpunkte der erzeugenden Büschel beliebig gewählt werden.

In einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten A, B kann der dritte und vierte Grundpunkt eines der erzeugenden Büschel beliebig gewählt werden; von dem zweiten Büschel kann nur ein Punkt beliebig angenommen werden.

11. Aus dem Vorigen ergiebt sich:

Eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten (unicursale Curve) ist bestimmt und construirbar durch drei Doppelpunkte und noch fünf Punkte.

Es seien die Doppelpunkte durch $A, B, C,$ die übrigen Punkte durch 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet.. Die Construction ist auf folgende Weise ausführbar:

Man wähle als Grundpunkte der erzeugenden Büschel $A, B, C,$ 1 und $A, B, C,$ 2. Die Projectivität der Büschel ist bestimmt; denn den durch 3, 4, 5 gelegten Kegelschnitten des erstgenannten Büschels entsprechen die des zweiten Büschels durch die nämlichen Punkte. Die Curve ist also linear zu construiren; jedesmal muss der vierte Schnittpunkt von zwei Kegelschnitten durch die nämlichen drei Punkte bestimmt werden.

12. Wir folgern weiter:

Durch zwei Doppelpunkte A, B und sieben Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 können unendlich viele Curven vierter Ordnung mit den Doppelpunkten A, B gelegt werden; durch jeden beliebigen Punkt 8 geht eine dieser Curven.

Wir wählen als Grundpunkte der beiden Büschel $A, B,$ 1, 2 und $A, B,$ 3, 4; nach dem Vorigen ist ihre Projectivität bestimmt, und eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten durch die gegebenen Punkte construirbar. Diese ist jedoch nicht die einzige, denn einer der Punkte 3 oder 4 des zweiten Büschels müsste, wenn die Zahl der gegebenen Punkte für die Construction vollständig wäre, von dem anderen abhängig sein. Dies erhellt näher durch die Bestimmung des geometrischen Ortes des Punktes 4, wenn der Punkt 3 fest gedacht wird. Wir bezeichnen mit α, β diejenigen Kegelschnitte von $(AB12)$, welche durch 4 und 8 gehen, und construiren eine Curve vierter Ordnung γ, deren drei Doppelpunkte $A, B,$ 3 sind, die ausserdem durch 5, 6, 7 geht und in 4 die Tangente des mit α homologen Kegelschnitts α' berührt. Dies ist, wie ersichtlich, ein besonderer Fall des vorigen Problems und kann ausgeführt werden mit den erzeugenden Büscheln $(A, B, 3, 4)$ und $(A, B, 3, 5)$; zur Bestimmung der Projectivität dienen die Punkte 6, 7 und die Bedingung, dass der Kegelschnitt $AB354$ homolog ist mit α'. Die Rolle des Punktes 4 bei der Construction der verlangten Curve vierter Ordnung kann nun durch jeden Punkt von γ übernommen werden, die Curve ist also der geometrische Ort des vierten Grundpunktes des Büschels, dessen drei übrige Grundpunkte $A, B,$ 3 sind.

Damit die Curve den Punkt 8 enthalte, bestimme man den fehlenden Schnittpunkt P von γ mit dem zu β homologen Kegelschnitt β' von $(AB34)$

und lege einen Kegelschnitt $AB3P8$. Sie schneidet γ in noch einem Punkte Q, dem vierten Punkte des zweiten erzeugenden Büschels.

Zu beachten ist, dass die Construction der Curve mit zwei Doppelpunkten linear ausgeführt werden kann. Der Schnittpunkt P von γ mit β kann nämlich nach 9. *b.* linear bestimmt werden, ebenso der Punkt Q; zwar erhält man bei der Construction der Schnittpunkte von zwei homologen Kegelschnitten der erzeugenden Büschel je zwei Schnittpunkte; durch lineare Construction kann jedoch der vierte Schnittpunkt bestimmt werden von C_4 mit einer durch A und einen Punkt der Curve gezogenen Geraden; dieser Punkt kann wieder mit B verbunden werden, und so sind alle weiteren Punkte linear zu bestimmen.

Die Vertauschbarkeit der Grundpunkte des ersten erzeugenden Büschels giebt die Lösung des Problems, eine Tangente in einem der gegebenen Punkte zu ziehen.

13. Die auf diese Weise construirte ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten kann betrachtet werden als die Centralprojection von Raumcurven vierter Ordnung. Um eine dieser Raumcurven zu bekommen, wählen wir ein Projectionscentrum P und projiciren aus ihm die Curve C_4; es wird dadurch eine Kegelfläche vierter Ordnung K^4 mit zwei Doppelstrahlen a und b erzeugt. Legen wir jetzt eine Fläche zweiter Ordnung F^2 durch diese zwei Doppelstrahlen, so ist C_4 die Centralprojection der Schnittcurve beider Flächen. Diese Schnittcurve k^4 ist eine Raumcurve vierter Ordnung; eine beliebige Ebene α schneidet nämlich K^4 und F^2 in einer ebenen Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und in einem Kegelschnitte durch diese, welche Curven ausser den Doppelpunkten noch vier Punkte gemein haben. Die Raumcurve ist weiter erster Art; denn legen wir eine veränderliche Ebene durch den Doppelstrahl a, so schneidet diese F^2 in einer Geraden der Schaar, zu welcher b gehört, und K^4 in noch zwei Geraden; daraus folgt, dass jede der Geraden der Schaar b mit der Raumcurve zwei Punkte gemein hat. Dies ist auch mit den Geraden der Schaar a der Fall; also ist die Curve eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, und die Theorie dieser Curven kann benutzt werden, um die Constructionen und Eigenschaften der ebenen Curven vierter Ordnung zu ergänzen.

14. Zuerst erhellt daraus der Satz: Zwei ebene Curven vierter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten haben ausser diesen Doppelpunkten höchstens noch acht gemeinschaftliche Punkte.

Es seien die Curven C_4 und C'_4, ihre zusammenfallenden Doppelpunkte A und B. Wir projiciren beide aus einem Punkte P; es entstehen die Kegel vierter Ordnung K^4 und K'^4 mit gemeinschaftlichen Doppelstrahlen a und b. Eine Fläche zweiter Ordnung F^2 durch a und b schneidet beide Kegel in je einer Raumcurve vierter Ordnung; diese beiden Raumcurven k^4 und k'^4 haben höchstens acht Punkte mit einander gemein*); die Projectionen dieser Punkte sind die gemeinschaftlichen Punkte von C_4 und C'_4. Haben k^4 und k'^4 sieben gemeinschaftliche Punkte, so ist der achte Schnittpunkt bekanntlich für alle durch diese sieben Punkte gehenden Raumcurven vierter Ordnung derselbe und kann linear construirt werden**). Daraus folgt, dass auch bei den gegebenen ebenen Curven der achte Schnittpunkt linear bestimmt werden kann, wenn sieben Schnittpunkte gegeben sind, und dieser achte Schnittpunkt ist für den ebenen Curvenbüschel durch diese sieben Punkte constant.

15. Der Satz findet Anwendung bei der Construction von 12. Wir fanden, dass die unicursale Curve γ der geometrische Ort aller Punkte Q ist, die mit $AB3$ den zweiten erzeugenden Büschel der Curve C_4 bestimmen, deren erster erzeugender Büschel $(AB12)$ ist. Die Curven C_4 und γ haben die Doppelpunkte A, B und ausserdem noch $34567Q$, also sieben Punkte gemein, da 3 als Doppelpunkt von γ zweifach zählt. Sie schneiden sich also noch in einem achten Punkte Q'; dieser Punkt ist der unveränderliche achte Schnittpunkt aller Curven, die durch $AB12\ldots7$ gehen, also der achte Grundpunkt eines Büschels von Curven vierter Ordnung.

Die Unveränderlichkeit des Punktes Q' als achten Grundpunktes eines C_4-Büschels giebt Anlass zu den folgenden Sätzen:

Legt man einen Kegelschnitt durch die Doppelpunkte A, B einer Curve C_4, der sie noch in den Punkten $PQRS$ schneidet, und zieht man die Geraden AP, AQ, BR, BS, die C_4 noch in $P'Q'R'S'$ schneiden, so sind $ABP'Q'R'S'$ sechs Punkte eines Kegelschnitts.

Zieht man durch A und auch durch B zwei Gerade, die die Curve

*) *Reye*, G. d. L. II, 150.

**) *Reye*, G. d. L. II, 152. Die lineare Construction des achten Schnittpunktes zweier Raumcurven vierter Ordnung ist neuestens eingehend behandelt von Herrn *F. Caspary* und Herrn *H. Schröter*, dieses Journal Bd. 99, Seite 110—140. Dort befindet sich auch die Literaturangabe der hauptsächlichsten Arbeiten über diesen Gegenstand; ferner von Herrn *R. Sturm* und *H. G. Zeuthen*, Bd. 99, S. 317—323; endlich von Herrn *Reye*, Bd. 100, S. 487—489.

in den Punkten PP', QQ', RR', SS' schneiden, so liegen diese Punkte mit AB auf einer Curve dritter Ordnung.

Im ersten Falle bilden AP, AQ und BR, BS eine besondere in vier Gerade zerfallende Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten A und B; die Punkte PP'... sind ausser A und B die Grundpunkte des Curvenbüschels; die Curve $ABPQRS$ bildet den einen Theil einer Curve vierter Ordnung des Büschels; der zweite Theil muss ebenfalls eine Curve zweiter Ordnung sein, d. h. $ABP'Q'R'S'$ ist ein Kegelschnitt.

Im zweiten Falle ist der eine Theil der Curve durch die acht Grundpunkte $ABPP'$... die Gerade, der zweite Theil muss also eine Curve dritter Ordnung sein, die gleichfalls A und B enthält.

Im ersten Falle können die Punkte P und Q mit A, und R und S mit B zusammenfallen; der Kegelschnitt geht über in die Verbindungslinie AB, die Geraden sind die Tangenten in den Doppelpunkten, und der Satz lautet:

Die Doppelpunkte und die vier Schnittpunkte ihrer Tangenten mit der Curve sind Punkte eines Kegelschnittes.

Im zweiten Falle können die Punkte P und P', Q und Q' u. s. w. zusammenfallen, es folgt hieraus der Satz:

Zieht man aus A und aus B zwei Tangenten an die Curve, so kann eine Curve dritter Ordnung construirt werden durch A, B, die die Curve C_4 in den Berührungspunkten P, Q, R, S berührt.

16. Aus der Eigenschaft der Raumcurven vierter Ordnung, dass durch eine beliebige Gerade acht Tangentialebenen an die Curve construirt werden können *), ergiebt sich, dass die Curve C_4 von der achten Klasse ist; da weiter die Zahl dieser Tangentialebenen für jeden Schnittpunkt der Geraden mit der Raumcurve um zwei vermindert wird, so giebt es durch die Projectionsstrahlen a und b nur vier Tangentialebenen und deshalb auch aus den Punkten A und B nur vier Tangenten an die Curve.

Aus der Betrachtung der ebenen Curve C_4 als Centralprojection der Raumcurve k^4 ergiebt sich ein geometrischer Beweis der Eigenschaft, dass die beiden Büschel der vier Tangenten aus den Doppelpunkten gleiches Doppelverhältniss besitzen **).

*) *Reye*, G. d. L. II, 156.

**) Der analytische Beweis findet sich in *Salmon-Fiedler*, Anal. Geometrie der höheren ebenen Curven. Zweite Auflage. S. 317.

Der Beweis kann auf folgende Weise gegeben werden:

Diejenigen Geraden, deren Polaren in Bezug auf die Flächen des F^2-Büschels, deren Grundcurve k^4 ist, Kegelflächen bilden, gehören bekanntlich zu einem tetraedralen Strahlencomplex, dessen Hauptpunkte die vier Mittelpunkte der zum Büschel gehörenden Kegelflächen sind *). Zu dem Complex gehören auch die Tangenten der Grundcurve k^4; denn ihre Polaren schneiden sich in ihren Berührungspunkten mit der Curve, und deshalb ist das Doppelverhältniss der durch eine dieser Tangenten und die Hauptpunkte gelegten Ebenen constant.

Da weiter diese Ebenen zugleich Tangentialebenen der vier Kegelflächen des F^2-Büschels sind, so lautet dieser Satz in anderen Worten:

Das Doppelverhältniss der vier Tangentialebenen, welche durch eine Tangente der Grundcurve noch an dieselbe gehen, ist constant.

Man betrachte nun die durch die Raumcurve vierter Ordnung und die Projectionsstrahlen a und b gelegte Regelfläche zweiter Ordnung F^2; auf dieser wird die Raumcurve berührt durch vier Gerade $\mathfrak{t}_1^a \mathfrak{t}_2^a \mathfrak{t}_3^a \mathfrak{t}_4^a$ der Schaar, zu welcher a gehört, sowie durch vier Gerade $\mathfrak{t}_1^b \mathfrak{t}_2^b \mathfrak{t}_3^b \mathfrak{t}_4^b$ der Schaar b. Dadurch entstehen die gleichen Doppelverhältnisse:

$$(a.\mathfrak{t}_1^b \mathfrak{t}_2^b \mathfrak{t}_3^b \mathfrak{t}_4^b) = (\mathfrak{t}_1^a.\mathfrak{t}_1^b \mathfrak{t}_2^b \mathfrak{t}_3^b \mathfrak{t}_4^b),$$

$$(b.\mathfrak{t}_1^a \mathfrak{t}_2^a \mathfrak{t}_3^a \mathfrak{t}_4^a) = (\mathfrak{t}_1^b.\mathfrak{t}_1^a \mathfrak{t}_2^a \mathfrak{t}_3^a \mathfrak{t}_4^a) \text{ **)},$$

und da dem vorigen Satze zufolge die beiden zweiten Glieder dieser Gleichungen denselben Werth haben, so ist dies auch der Fall mit den ersten Gliedern. Die zwei Ebenenbüschel endlich schneiden die Ebene der Curve C_4 in den aus den Doppelpunkten an die Curve gezogenen Tangenten, und die beiden Tangentenbüschel besitzen also dasselbe Doppelverhältniss.

17. Schliesslich ist es möglich, auch die Construction der Doppeltangenten der ebenen Curve C_4 auf die Construction der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückzuführen. Dazu werden die Doppeltangenten als besondere Fälle von vierfach berührenden Kegelschnitten betrachtet; die letzteren ergeben sich als Durchschnitte der Tangentenkegel aus P an die Flächen des F^2-Büschels mit der Ebene von C_4; sie haben ihre vier

---

*) *Reye,* G. d. L. II, 145, 148.

**) Dieser Satz findet sich als ungelöste Aufgabe in *Fiedler,* Darst. Geometrie. II. S. 172—173. Der hier gegebene Beweis für zwei Sehnen, die einander schneiden, kann ausgedehnt werden auf zwei beliebige Sehnen.

Berührungspunkte in den Schnittpunkten von C_4 mit Kegelschnitten, die in den Punkten A und B zwei feste Gerade berühren*).

Die Doppeltangenten entstehen als Centralprojectionen der Durchschnitte der Polarebenen von P in Bezug auf die vier Kegelflächen des F^2-Büschels; die Schnittpunkte von zwei zu einander gehörenden Doppeltangenten sind also die aus P bewirkten Projectionen der Mittelpunkte dieser Kegelflächen. Diese Mittelpunkte sind weiter die Schnittpunkte der Raumcurven dritter Ordnung, welche die geometrischen Oerter der Pole in Bezug auf den F^2-Büschel von zwei Ebenen α und β durch P bilden; sie werden aus P als Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt oder als ein Kegelschnitt projicirt, je nachdem P auf der Curve oder ausserhalb derselben gelegen ist.

Es sei nun k^3 die kubische Raumcurve, die den geometrischen Ort der Pole einer durch P gehenden Ebene α bildet; diese Ebene schneide die Ebene von C_4 in c. Aus P construire man weiter den Berührungskegel einer Fläche des Büschels, welcher den vierfach berührenden Kegelschnitt K_2 liefert, und den Pol von α in Bezug auf die Fläche, welche in C projicirt wird; so ist C der Pol von c in Bezug auf K_2, hieraus ergiebt sich:

Der geometrische Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf das System der vierfach berührenden Kegelschnitte, deren Berührungspunkte auf den Schnittpunkten von C_4 mit einem Büschel Kegelschnitte gelegen sind, der zwei feste Gerade durch A und B in diesen Punkten berührt, ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt; diese Curve geht in einen Kegelschnitt für die Gerade AB über. Dieser Kegelschnitt ist zugleich der geometrische Ort aller Doppelpunkte der Curven dritter Ordnung.

Die Schnittpunkte der Paare zu einander gehörender Doppeltangenten werden nun bestimmt als Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Curve dritter Ordnung, deren Doppelpunkt auf ihm gelegen ist; die Lösung dieses Problems wird ganz auf die der Probleme von 5. zurückgeführt.

Es muss beachtet werden, dass zur Construction der Fläche F^2, deren Durchschnitt mit K^4 die Raumcurve k^4 bildet, auf jeder der Geraden a und b zwei Punkte beliebig gewählt werden können, die Punkte von k^4 sein sollen. Die Tangentenebenen in diesen Punkten bestimmen dann F^2 voll-

*) Die vollständige Theorie findet sich *Fiedler,* Darst. Geometrie. II. § 46.

ständig, und die in Bezug auf P zu k^4 conjugirte Gerade p verbindet die Punkte auf a und b, die in Bezug auf P zu den angenommenen Punkten der Raumcurve harmonisch liegen. Die Tangentenebenen in den angenommenen Punkten von k^4 und die in den Schnittpunkten von p mit a und b schneiden nun die Ebene von C_4 in den Tangenten in den Doppelpunkten A und B und in den Geraden, die durch den Büschel Kegelschnitte berührt werden, und die letzteren sind conjugirt harmonisch zu AB in den beiden Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte A und B und deren andere conjugirt harmonische Strahlen die Tangenten in diesen Doppelpunkten sind. Die beiden festen Geraden durch A und B können also construirt werden.

18. Aus der Bemerkung bei 4. folgt, dass beide Doppelpunkte einer ebenen Curve vierter Ordnung conjugirt imaginär sein können; imaginäre Punkte und Gerade können gleichfalls bei jeder der behandelten Constructionen auftreten; ausser den allgemeinen Fällen der Curve, die eintheilig, zweitheilig oder ganz imaginär sein kann, kann sie noch besondere Formen haben. So können durch specielle Lage der erzeugenden Büschel zu einander die Formen von Doppelpunkten entstehen, welche unter dem Namen Berührungsknoten, Knotenspitze, Osculationsspitze u. s. w. bekannt sind. Da diese Arbeit nur den Zweck hat, einige allgemeine Constructionen hervorzuheben, so wird die Discussion dieser Fälle und der dazu gehörigen Constructionen an diesem Orte unterlassen.

Tilburg, im April 1886.

Zwei geometrische Beweise eines Satzes von *Hesse*.

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *Fritz Hofmann* in München.)

„Sind in einem Vierseit zweimal zwei gegenüberliegende Seiten conjugirt in Bezug auf einen Kegelschnitt, so sind es auch die Diagonalen."

Von diesem Satze, der sich an mehreren Stellen von *Hesses* Schriften bewiesen findet*) und der gewöhnlich geradezu nach ihm der „*Hesse*sche Satz" genannt wird, sollen im Folgenden zwei einfache Beweise mitgetheilt werden, von welchen vielleicht der zweite durch die ihm zu Grunde liegende Methode ungewöhnlich erscheinen dürfte. Zu seiner Durchführung genügt nämlich die richtige „Betrachtung", die richtige „Deutung" der vorgegebenen Figur von zwei Dimensionen als Bild einer solchen von drei Dimensionen; ohne dass der vorgegebenen Figur eine einzige neue Hülfslinie hinzugefügt würde. Die ebene Figur wird aufgefasst als Schein eines räumlichen Gebildes; zwei gewisse kritische Linien der vorgegebenen, ebenen, Figur — nämlich die Diagonalen — können dann interpretirt werden als Bilder von gewissen räumlichen Geraden, deren polare Beziehungen, im Raume, zu den andern Theilen der räumlichen Figur besonders einfach herzustellen sind. Aus der Existenz dieser räumlichen Beziehungen schliesst man wiederum auf gewisse Verhältnisse im Strahlenbündel, welches die räumliche Figur dem betrachtenden Auge übermittelt, und demnach schliesslich auf Beziehungen in jenem ebenen Schein selbst, welcher identisch ist mit der von vornherein vorgegebenen Figur; — Beziehungen, die nichts weiter sind als eine Aussprache des zu beweisenden Satzes.

*) Vergl. dessen „Sieben Vorlesungen aus der anal. Geom. der Kegelschn. 1874" pag. 32. Ein ausführliches Literaturverzeichniss für diesen Satz giebt *Baltzers* „Analyt. Geom. 1882", pag. 212. Dasselbe findet sich noch weiter ergänzt in des Verfassers „Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte, Leipzig", pag. 73.

A.

Ist ein Kegelschnitt K vorgegeben (Fig. 1), und sind in seiner Ebene zwei beliebige Punkte A, B fest angenommen, so kann man jeden Strahl des Büschels A schneiden mit jenem Strahl durch B, welcher ihm in Bezug auf K conjugirt ist.

Als Ort der Schnittpunkte von je zwei einander so zugewiesenen Strahlen der Büschel A und B erhält man einen Kegelschnitt M. Zieht man eine Tangente von A an K, so ist ihr Pol in Bezug auf K identisch mit ihrem Berührpunkte; daher geht der Kegelschnitt M durch die vier Berührpunkte der von A und B an K möglichen Tangenten. Da M zugleich durch A und B selbst geht, so folgt der Satz: „Sind AB beliebig gegeben, so liegen die sechs Punkte, — nämlich die beiden Punkte A und B, sowie die vier Berührpunkte der Tangenten an K von A und B aus — alle auf einem Kegelschnitte M“ *). —

Was den Pol C anlangt der Verbindungsgeraden (γ) von A und B, in Bezug auf K, so kann derselbe mit Hülfe dieses Kegelschnitts M ermittelt werden. Derselbe liegt nämlich, nach der Definition von M, auf jenem Strahle durch B, welcher im Büschel B zugewiesen ist dem Strahl γ des Büschels A. Daher liegt der Pol C von γ, in Bezug auf K, auf der Tangente an M durch B. Aus demselben Grunde liegt er auch auf der

---

*) Man kann diesen Satz auf verschiedene Weise als Specialisirung eines allgemeineren erkennen, welcher nicht mehr von einem Punktepaar AB spricht, sondern von einem zweiten Kegelschnitte K', ausser dem vorgegebenen K. Von der oben gegebenen Erzeugungsweise des Kegelschnitts ist die folgende nicht verschieden: Man frage nach dem „Ort jener Punkte R, von welchen aus die Punkte AB durch ein Linienpaar projicirt werden, welches die Tangenten von R an K harmonisch trennt“.

Nun ist aber bekannt (*Salmon-Fiedler*, Kegelschn. Art. 356), dass der Ort jener Punkte, von welchen aus zwei vorgegebene Kegelschnitte K und K' durch zwei einander harmonisch trennende Tangentenpaare projicirt werden, ein *Kegelschnitt* ist; und so gelangt man auf die Existenz unsres Kegelschnittes M, indem man eben den Kegelschnitt K' ausarten lässt in A und B. Vgl. noch wegen dieses Kegelschnittes: *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geom. pag. 281, sowie *Salmon-Fiedler*, Lessons on modern higher algebra art. 134, Beispiel 3. — Eine — nach Niederschrift des gegenwärtigen Artikels erschienene — Monographie des Verfassers: „Synthetische Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes, Leipzig 1887“ hat eine eingehende Discussion dieses Kegelschnitts zum Hauptgegenstand.

Oder noch einfacher: die acht Berührpunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten von zwei Kegelschnitten KK' liegen wieder auf einem Kegelschnitte (*Salmon-Fiedler*, a. a. O. 354); artet nun K' aus in das Punktepaar A und B, so erhält man wieder die Figur unsres Satzes. Vergl. auch noch *v. Staudt*: „Geometrie der Lage“ I, art. 293.

Tangente an M durch A; und man hat: „Der Pol der Geraden γ ist identisch für die beiden Kegelschnitte K und M“.

Wäre nun vorgegeben (Fig. 2) — um auf *Hesses* Satz zu gelangen: die beiden Geraden durch A: 2 und 3, durch B: 1 und 4, und es sei, nach der Voraussetzung, conjugirt 1 zu 3, 2 zu 4, so wäre zu beweisen, da wir ja ein Vierseit 1234 vor uns haben, dessen Seiten (paarweise, je zwei gegenüberliegende) conjugirt sind, „dass die Verbindungslinie DE (die eine Diagonale) durch den Pol von AB (der andern Diagonale), in Bezug auf K, hindurchgeht“. —

Nach Einzeichnung des vorhin besprochenen Kegelschnittes M ist aber diese Thatsache direct der Figur zu entnehmen. Nach der Voraussetzung sind 13 conjugirt, sowie auch 24; demnach sind die Punkte (13), (24) der Figur 2 Punkte unsres Kegelschnittes M, wie er oben definirt wurde für die Punkte AB und den Kegelschnitt K.

Wir können also jenen Kegelschnitt M durch A, B (13), (24) führen und schliesslich noch an M die beiden Tangenten in A und B legen (letztere schneiden sich, wie oben bewiesen, im Pole der Geraden γ in Bezug auf K). Für diesen Kegelschnitt M wollen wir nunmehr das Sechseck betrachten, das gebildet wird von folgenden sechs Punkten:

A (doppelt gerechnet); (13); B (doppelt gerechnet); (24);

oder von den sechs Geraden:

Tangente in A; 3; 1; Tangente in B; 4; 2.

Für dieses Sechseck sind gegenüberliegende Seitenpaare:

erstens: die beiden Tangenten in A und B;

dann: die mit 3 und 4 bezeichneten Geraden;

schliesslich: die mit 1 und 2 bezeichneten Geraden.

Daher schliesslich nach *Pascals* Theorem: Die Verbindungslinie ED geht durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten an M in A und B; d. h. sie geht durch den Pol von γ in Bezug auf K. Dies war zu beweisen. —

B.

Dieser zweite Beweis setzt sich aus drei Schlüssen zusammen, welche sämmtlich an derselben Figur vollzogen werden, indem dieselbe, zunächst *eben* gezeichnet, interpretirt wird als Bild *räumlicher* Dinge — schliesslich aber, wieder als ebene Zeichnung aufgefasst, den *Hesse*schen Satz direct liefert.

I. Wird von der beifolgenden ebenen Figur (Nr. 3) vorausgesetzt, dass sie durch richtige Ausführung folgender Constructionen hergestellt wurde: „durch den Pol (I) der Geraden 1 wurde die Gerade 3 gezogen, durch den Pol (II) der Geraden 2 wurde die Gerade 4 gezogen", — dann *darf* man sich ein Ellipsoid als möglich vorstellen, welches dem Auge erscheint als durch die Ellipse *K* projicirt, und ferner darf man sich vorstellen ein windschiefes, zusammenhängendes Vierseit von vier Geraden 1234 im Raume, welche paarweise — je zwei gegenüberliegende — reciproke Polaren sind in Bezug auf jenes Ellipsoid und dem Auge erscheinen als die Geraden 1234 der Figur:

Oder mit andern Worten: Man kann die ebene Figur 3 verbunden denken mit dem nicht in ihrer Ebene gelegenen Augpunkte *P* (von welchem aus man sie betrachtet) durch einen projicirenden Kegel (durch die Curve *K* gehend), sowie durch vier Ebenen, welche alle durch den Augpunkt gehen und die vier Geraden 1, oder 2, 3, 4.

In dieses „Strahlenbündel" von projicirenden Geraden und Ebenen durch den Augpunkt *P* *darf* man die körperliche Figur eines Ellipsoids mit einem windschiefen Vierseit von jenen Polareigenschaften sich eingezeichnet denken, so zwar, dass jenes Strahlenbündel durch *P* ein *richtiges* Bild dieser räumlichen Figur giebt, *zugleich* aber auch in der räumlichen Figur die vier windschiefen Geraden, von welchen immer je zwei reciproke Polaren sein sollen in Bezug auf das Ellipsoid, als solche *richtig* construirt sind.

Kurz: „Man kann in das Strahlenbündel vom Auge nach der ebenen Figur eine solche räumliche Figur *einfügen*". —

II. In der räumlichen Figur sind die beiden windschiefen Geraden *AB, DE* reciproke Polaren in Bezug auf das Ellipsoid. —

III. Zwei windschiefe Gerade *AB, DE,* welche reciproke Polaren sind in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, bilden, von einem beliebigen Punkte des Raumes aus betrachtet, mit dem Bilde dieser Fläche selbst die Figur von zwei conjugirten Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Mit andern Worten: „Ist eine Raumfigur vorgegeben, welche enthält: eine Fläche zweiter Ordnung, sowie zwei windschiefe Gerade, die reciproke Polaren sind in Bezug auf diese Fläche; so kann man durch diese Raumfigur, sowie einen beliebigen (Aug-) Punkt ein *Strahlenbündel* legen, welches dieselbe mit dem Punkte verbindet. In diesem Strahlenbündel — bestehend aus einem Kegel und zwei Ebenen — sind die beiden Ebenen

polar conjugirt in Bezug auf den Kegel; demnach wird dieses Strahlenbündel geschnitten von jeder (Zeichnungs-) Ebene in der Figur eines Kegelschnitts, für welchen die Spuren jener beiden Ebenen conjugirte Polaren sind".

Es ist evident, dass mit diesen drei Schlüssen der *strenge* Beweis des *Hesse*schen Satzes geleistet ist. Wir wiederholen denselben in möglichst zusammengedrängter Form, wie er sich schliesslich — nach Erledigung der obigen Theile der Beweiskette — gestaltet:

„Die ebene Figur 3 *ist* (I.) das Bild eines Ellipsoids mit einem windschiefen, zusammenhängenden Vierseit, von welchem immer je zwei gegenüberliegende Seiten reciproke Polaren sind in Bezug auf das Ellipsoid.

Von einem solchen Vierseit *weiss* man (II.), dass auch die windschiefen Diagonalen reciproke Polaren sind in Bezug auf dasselbe Ellipsoid.

Solche Polaren *erscheinen* (III.) immer als Gerade, welche conjugirt sind in Bezug auf das ebene Bild des Ellipsoids. —

Zum Beweise der drei Abtheilungen werden wir uns mit Vortheil — der Kürze wegen — einer metrischen Specialisirung jener „Fläche zweiter Ordnung" bedienen, nämlich einer Kugel; zugleich auch, statt vom Kegelschnitte K mit zwei für ihn conjugirten Geradenpaaren 13, 24 zu sprechen, uns denken den imaginären Kugelkreis vorgegeben auf der unendlich fernen Ebene, nebst vier auf dieser Ebene gegebenen *Stellungen* 13, 24; von welchen 1 auf 3, dann auch 2 auf 4 senkrecht ist.

D. h. statt des *Hesse*schen Satzes in seiner allgemeinen Form werden wir den folgenden Satz beweisen: „Sind durch einen Punkt P zwei Ebenenpaare 13 und 24 gegeben, derart, dass die Ebene 1 auf 3, und die Ebene 2 auf 4 senkrecht steht, dann kann man einerseits eine Ebene ED legen durch die Schnittgeraden der Ebene (12) und jene von (34), andrerseits eine Ebene AB durch die Schnittgeraden von (14) und (23); diese beiden so erhaltenen Ebenen durch P stehen auf einander senkrecht" *).

Und an Stelle jenes Ellipsoids wird man die Existenz einer *Kugel* zu beweisen haben, welche P zum *Mittelpunkt* hat (denn in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung, als deren Bild eine ebene Curve erscheint, ist der Augpunkt *Pol* der Zeichnungsebene, welche die ebene Curve enthält —;

*) Fast in derselben Fassung findet sich dieser Satz bei *v. Staudt:* „Geometrie der Lage I", Art. 349; auch dort wird er erwähnt als Specialisirung des allgemeineren *Hesse*schen Satzes (a. a. O. 244).

im allgemeinen Fall ist also die aufzustellende Fläche zweiter Ordnung dadurch charakterisirt, dass sie erstens durch die vorgegebene ebene Curve geht, andererseits den Augpunkt als Pol der Zeichnungsebene aufweist; — demnach ist für unsere Specialisirung eine *Kugel* zu fordern, weil eine solche den unendlich fernen Kugelkreis enthält, andererseits muss P zusammenfallen mit dem Pole der (unendlich fernen) Ebene, welche jenen Kugelkreis enthält; d. h. P muss *Mittelpunkt* der nachzuweisenden Kugel werden).

Kann in dieser neuen Form der Nachweis des Satzes erbracht werden, so hat derselbe *vollständige Beweiskraft* für den allgemeinen Fall: an jeder Stelle könnte ja derselbe übertragen werden in die Sprache der allgemeinen, synthetischen Geometrie, und wir schlagen diesen Weg der Specialisirung nur ein — es sei ausdrücklich wiederholt —, weil sowohl die nothwendigen Figuren übersichtlicher ausfallen, als auch die Aussprache der Beweise an Kürze gewinnt.

Es wäre also zu zeigen:

I. Wenn vorgegeben zweimal 2 Stellungen von Ebenen, die paarweise auf einander senkrecht sind: 1 auf 3, 2 auf 4, so kann durch jeden Punkt des Raumes P eine *Kugel* $\varkappa$ gelegt werden mit P als Mittelpunkt, für welche ein windschiefes Vierseit, gebildet aus vier Geraden 1 2 3 4, von der Beschaffenheit existirt, dass die vier *Geraden* 1 2 3 4 von P aus durch Ebenen von jenen vier *Stellungen* 1 2 3 4 projicirt werden, und zugleich die Raumgeraden 1 und 3, 2 und 4 paarweise reciproke Polaren vorstellen in Bezug auf die Kugel.

II. Die Diagonalen dieses räumlichen Vierseits AB, DE sind reciproke Polaren in Bezug auf die Kugel.

III. Je zwei reciproke Polaren einer Kugel werden vom Mittelpunkte aus durch Ebenen projicirt, die auf einander senkrecht stehen.

Sei nun vorgegeben (Fig. 4) ein Punkt P, sowie zwei Ebenenpaare 1 und 3, 2 und 4 durch P (paarweise senkrecht stehend). Es wird sich im Beweise ad I. ergeben, dass, sobald eine der vier Geraden des Vierseits willkürlich angenommen ist, z. B. AD auf der Ebene 1 (senkrecht zur Ebene 3), dann das ganze Vierseit nur noch auf eine Art vollendet werden kann, dass dann aber auch die Kugel *bestimmt* ist, für welche das Vierseit $ADBE$ zweimal 2 reciproke Polaren enthält. —

ad I. Der Nachweis von I. geht in folgender Richtung vorwärts:

Wir nehmen zunächst *eine* Seite AD beliebig an in der Ebene 1 (wir nehmen aber jedenfalls DA senkrecht zur Ebene 3, aus Rücksicht für die später auftretende Kugel, deren polare Eigenschaften es ja mit sich bringen, dass, wenn die Gerade AD und eine in der Ebene BEP verlaufende Gerade reciproke Polaren sind, die Gerade AD senkrecht stehen muss auf der Ebene 3 durch BE und den Mittelpunkt).

Diese Gerade AD wird getroffen von der vorgegebenen Ebene 2 in D, von der Ebene 4 in A; von D aus fälle man eine Senkrechte $DB\delta$ auf die Ebene 4 (dieselbe verläuft in der Ebene 2, sie steht im Punkte δ senkrecht auf der Schnittgeraden π von 2 und 4), welche die Ebene 3 in B treffe; und von A aus fälle man eine Senkrechte $A\alpha E$ auf die Ebene 2 (dieselbe verläuft in der Ebene 4, sie steht im Punkte α senkrecht auf π), welche die Ebene 3 in E treffe.

Hierauf bestimme man die beiden Punkte xy (dieselben sind in Fig. 4 weggelassen), welche zugleich α und δ harmonisch trennen auf π, zugleich aber von P gleichweit entfernt sind. Durch die Punkte xy kann man dann eine Kugel legen mit dem Mittelpunkte P.

Von dieser Kugel kann man sogleich zeigen, dass die Geraden AE und BD für sie reciproke Polaren sind (Fig. 5). Wir haben zwei Gerade, die in zwei zu einander senkrechten — durch den Mittelpunkt gehenden — Ebenen 2 und 4 verlaufen, derart, dass diese Geraden zugleich beide senkrecht stehen auf der Schnittgeraden π der beiden Ebenen; ferner sind die Fusspunkte $\alpha\delta$ dieser beiden Geraden harmonisch getrennt durch die Punkte xy, welche die Kugel $\varkappa$ auf π ausschneidet: diese Dinge *definiren* ja geradezu die beiden Geraden durch α und δ als reciproke Polaren in Bezug auf $\varkappa$.

Wir kehren nunmehr zur Figur 4 zurück, um uns die Frage vorzulegen: Wo ist die reciproke Polare der Geraden AD in Bezug auf die soeben bestimmte Kugel $\varkappa$ zu suchen?

Da die Gerade AD senkrecht steht auf der Ebene 3 durch den Mittelpunkt, so muss diese reciproke Polare auf dieser Ebene 3 verlaufen. Da die Gerade AD die Gerade BD *schneidet*, so muss ihre reciproke Polare auch die reciproke Polare von BD schneiden, nämlich AE; und da die Gerade AD auch die Gerade AE *schneidet*, so muss ihre reciproke Polare auch BD treffen, letzteres als reciproke Polare von AE.

Demnach: die gesuchte Gerade muss sowohl die Geraden AE, BD

schneiden als auch auf 3 liegen; sie ist also identisch mit der Verbindungslinie *BE* jener beiden Punkte, wo die vorhin construirten Senkrechten durch *D* und *A* die Ebene 3 durchstossen: „*BE* ist die reciproke Polare von *AD* in Bezug auf die Kugel $\varkappa$.“

(Nebenbei ist der — gar nicht selbstverständliche — Satz gewonnen, dass die Verbindungslinie *BE* senkrecht steht auf der Schnittgeraden ϱ der Ebenen 1 und 3).

„Somit können wir nun das windschiefe, zusammenhängende Vierseit *ADBE* im Raume umfahren und von ihm, dessen Seiten sämmtlich durch die vier vorgegebenen Ebenen nach *P* projicirt werden, aussagen, dass seine zwei Paare von je zwei gegenüberliegenden Seiten, nämlich *AD* und *BE* einerseits, *AE* und *BD* andererseits, reciproke Polaren sind in Bezug auf $\varkappa$.“

ad II. Indem wir uns ferner gestatten, die Bezeichnung 1, 2, 3, 4 gleichzeitig anzuwenden sowohl für eine Ebene durch *P*, als auch für die auf ihr gelegene Seite des Vierseits, können wir die Bestimmung der reciproken Polaren von *ED* (im Raume, in Bezug auf die Kugel $\varkappa$) rasch erledigen. Diese Gerade *ED* verbindet die Punkte (12) und (34) (Fig. 6), demnach ist ihre reciproke Polare identisch mit der Schnittgeraden der Polarebenen dieser beiden Punkte. Nun ist nach den Sätzen der räumlichen Polarentheorie die Polarebene des *Schnittpunktes* (12) identisch mit der *Verbindungsebene* 34 (weil die Geraden 3 und 4 die reciproken Polaren sind von 1, resp. 2); zugleich ist die Polarebene des Schnittpunktes (34) identisch mit der Ebene 12. Diese Ebenen 34, 12 schneiden sich längs der Geraden *AB*.

„Demnach sind in einem windschiefen Vierseit, derart wie wir es soeben für die Kugel $\varkappa$ bestimmt haben, wo nämlich zwei gegenüberliegende Seiten immer reciproke Polaren sind in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, auch die Diagonalen reciproke Polaren.“

ad III. Dass zwei reciproke Polaren in Bezug auf eine Kugel vom Mittelpunkte aus durch zwei zu einander senkrechte Ebenen projicirt werden, gehört den Elementen der Stereometrie an.

Diese Bemerkung ist vollständig äquivalent einem strengen Beweise zu dem pag. 178, III. gegebenen, viel allgemeiner erscheinenden Satze. Denn für eine Kugel ist deren Mittelpunkt durch nichts specialisirt — in synthetischem Sinne.

Hiermit erscheint in der That der verlangte Beweis vollständig geliefert. Die Gerade DE giebt, mit dem Mittelpunkt verbunden, genau jene Ebene durch die Schnittgeraden (12) und (34), von welchen die oben gegebene metrische Fassung unseres Satzes spricht; desgleichen giebt die Gerade AB, mit dem Mittelpunkt verbunden, die Ebene durch die Schnittgeraden (23) und (14); die Ebenen DEP und ABP stehen aber senkrecht aufeinander, denn die Gerade DE steht senkrecht auf der Ebene ABP — nach elementaren Beziehungen im Polarsysteme einer Kugel.

Anmerkung. Es wurde schon im Eingang des Beweises (zu I) bemerkt, dass die Lage der Geraden AD keine ganz willkürliche ist in der Ebene 1, sondern dass sie senkrecht geführt werden müsste zur Ebene 3, um die schliessliche Construction der Kugel zu ermöglichen.

Dies ist wichtig für den Fall, dass die *allgemeine* Figur (No. 3), interpretirt werden sollte als Bild räumlicher Vorgänge. Die Stelle, wo die räumlich werdende Gerade AD die Zeichnungsebene (die Polarebene des Auges), *wirklich* durchsetzt, ist nicht willkürlich zu nehmen, sondern darf *nur* in den *Pol* der Geraden 3 in Bezug auf den Kegelschnitt K versetzt werden. Desgleichen geht die räumliche Gerade 2, soll die Figur schliesslich richtig ausfallen, immer durch den Pol von 4, die Raumgerade 3 durch den Pol von 1. Dies ist wohl zu beachten, wenn der Leser versuchen wollte, durch darstellende-Geometrie an einer allgemeinen Raumfigur, wie sie aus Fig. 3 sich entwickelt, die Schlüsse zu wiederholen, wie sie uns die metrische Specialisirung lieferte.

Im Folgenden sind die Vorschriften vollständig gegeben, wie sie für eine solche Construction nothwendig sind:

Nachdem in der ebenen Figur die Pole von 1 2 3 4 in Bezug auf K bestimmt sind, verlege man den Augpunkt P an eine bestimmte Stelle des Raumes und construire durch ihn die vier Ebenen nach 1 2 3 4. In diese Ebenen kann man ein beliebiges sich schliessendes windschiefes Vierseit einzeichnen (dessen Seiten auf bestimmten Ebenen liegen, 1 2 3 4, und zugleich durch bestimmte Punkte gehen, III IV I II).

Aber damit ist dann eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt, zu welcher das Vierseit die schon oft besprochenen polaren Beziehungen hat. Die Construction dieser Fläche zweiter Ordnung fällt nicht mehr ganz einfach aus. Man bestimmt die räumliche Schnittgerade π der Ebenen 2, 4 durch P und ihre Schnittpunkte $\alpha\delta$ mit den Seiten 4, 2 jenes räumlichen

Vierseits; hierauf lege man eine Ebene ε beliebig durch π, welche den vorgegebenen Kegelschnitt K in $\mu\nu$ schneide. In dieser Ebene ziehe man $P\mu$, $P\nu$; dann giebt es einen Kegelschnitt von der Eigenschaft, dass er die Geraden $P\mu$, $P\nu$ berührt in μ, resp. ν, und dass zugleich die beiden auf π gelegenen Punkte $\alpha\delta$ in Bezug auf ihn polar conjugirt sind. Hat man einen solchen Kegelschnitt in der Ebene ε bestimmt, (seine Bestimmung ist eine Aufgabe vom zweiten Grade), dann giebt es *eine* Fläche zweiter Ordnung, welche durch diesen Kegelschnitt geht, sowie zugleich durch den vorgegebenen K, und für welche die Ebene von K die Polarebene von P ist*).

Von dieser Fläche zweiter Ordnung kann man zeigen, dass das vorhin willkürlich geführte Vierseit 1 2 3 4 auf den Ebenen 1 2 3 4 ein Vierseit von den öfters erwähnten polaren Eigenschaften ist.

*) Oder: „es lässt sich eine Fläche zweiter Ordnung in den vom Auge nach K führenden Kegel *hineinstecken*, welche zugleich den soeben bestimmten Hülfskegelschnitt enthält".

München, im November 1885.

Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$.

(Par M. *Joseph Perott* à Gra-Thumiac (Morbihan).)

Premier Mémoire.

Introduction.

On sait que l'équation

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

où D désigne un nombre entier, positif et non-carré, est toujours possible en nombres entiers quelle que soit la valeur de D. Il s'en faut de beaucoup pour qu'on puisse dire la même chose à l'égard de l'équation

$$t^2 - Du^2 = -1.$$

En effet, quand cette dernière équation est possible, la forme principale réduite $(1, E\sqrt{D}, \{E\sqrt{D}\}^2 - D)$ est équivalente à la forme réduite

$$(-1, E\sqrt{D}, D - \{E\sqrt{D}\}^2)$$

et cette dernière forme est contenue dans la période de la première.

D'où, en développant la période de la forme principale réduite, on obtient la décomposition de D en une somme de deux carrés premiers entre eux *). Toutes les fois donc qu'une telle décomposition est impossible, comme par exemple quand D est divisible par un nombre premier de la forme $4n+3$, l'équation

$$t^2 - Du^2 = -1$$

est aussi impossible **). D'autre part, cette équation est nécessairement

---

*) *Disqu. ar.*, art. 265.

**) Cette proposition était connue des Hindous. Comp. *Colebrooke, Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhâscara.* Lond. 1817, p. 179.

possible quand D est égal à une puissance impaire *) d'un nombre premier de la forme $4n+1$; car dans ce cas les deux seules et uniques formes réduites ambiguës

$$(1,\ E\sqrt{D},\ \{E\sqrt{D}\}^2-D) \quad \text{et} \quad (-1,\ E\sqrt{D},\ D-\{E\sqrt{D}\}^2)$$

devront être équivalentes entre elles. Quand D est égal à une somme de deux carrés sans être une puissance d'un nombre premier impair, l'équation

$$t^2-Du^2 = -1$$

est tantôt possible, tantôt impossible. C'est ainsi que, pour

$$D = 85 = 9^2+2^2 = 7^2+6^2,$$

l'équation

$$t^2-Du^2 = -1$$

est satisfaite par les valeurs

$$t = 378, \quad u = 41,$$

tandis que, pour

$$D = 221 = 11^2+10^2 = 5^2+14^2,$$

l'équation

$$t^2-Du^2 = -1$$

est impossible. En effet, la période de la forme principale réduite se compose dans ce cas des termes (1, 14, −25), (−25, 11, 4), (4, 13, −13), (−13, 13, 4), (4, 11, −25), (−25, 14, 1) et ne contient pas la forme (−1, 14, 25). C'est cette circonstance qui a porté *Lagrange* **), *Legendre* ***) et *Lejeune Dirichlet* †) à rechercher des critères pour déterminer *a priori* si l'équation

$$t^2-Du^2 = -1$$

est possible pour une valeur donnée de D. Nous n'insisterons d'ailleurs que sur les travaux de *Lejeune Dirichlet*. Après avoir démontré que l'équation

$$t^2-Du^2 = -1$$

est toujours possible quand D est un nombre premier de la forme $4n+1$,

*) Comp. *Lejeune Dirichlet, Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen,* § 2 (Abhandlungen der Berl. Ak. 1834) et *Vorlesungen* p. 202.

**) *Miscellanea Taurinensia,* t. IV, p. 88 ou *Oeuvres* t. I, p. 722.

***) *Théorie des Nombres,* 3ième édition, t. I, § VII, p. 64—71.

†) *Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen* (Abh. der Berl. Ak. 1834).

l'illustre arithméticien passe à la considération du cas où D est égal au double d'un nombre premier q de la forme $4n+1$. On démontre sans peine que l'équation

$$t^2-2qu^2 = -1$$

est toujours possible quand q est de la forme $8n+5$; ce n'est donc que le cas où $q=8n+1$ qui présente des difficultés. *Lejeune Dirichlet* démontre à ce sujet le théorème suivant: „L'équation

$$t^2-2qu^2 = -1$$

est toujours possible quand le nombre premier q est de la forme $16n+9$ et que l'on a $2^{\frac{q-1}{4}} \equiv -1 \pmod{q}$". La proposition de l'illustre arithméticien peut être remplacée par la suivante qui dit quelque chose de plus: „La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$t^2-2qu^2 = -1,$$

où q désigne un nombre premier de la forme $16n+9$, soit possible, est qu'on ait $2^{\frac{q-1}{4}} \equiv -1 \pmod{q}$; si q est de la forme $16n+1$ la condition $2^{\frac{q-1}{4}} \equiv 1 \pmod{q}$ est nécessaire sans être suffisante". Pour démontrer la proposition énoncée, nous allons faire remarquer d'abord que si l'équation

$$t^2-2qu^2=-1$$

est possible, la forme principale réduite est équivalente à la forme réduite $(-1,\ E\sqrt{2q},\ 2q-\{E\sqrt{2q}\}^2)$ et la période de la forme principale renferme par conséquent une forme telle que $(h,\ k,\ -h)$ ayant ses deux termes extrêmes égaux et de signe contraire. On en tire

$$2q = h^2+k^2.$$

Or si l'on pose

$$q = a^2+b^2$$

en désignant par a^2 le carré impair, on aura

$$2q = (a+b)^2+(a-b)^2$$

et cette décomposition sera unique dans ce sens qu'il n'existe pas d'autres carrés que $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ dont la somme donne $2q$. Il s'ensuit qu'on a

$$\pm h = a\pm b$$

où a peut être supposé positif tandis que les signes de h et de b doivent être choisis convenablement. On en tire, en se souvenant que la forme

$(h,\ k,\ -h)$ appartient au genre principal, la congruence

$$a\pm b\equiv\pm 1 \pmod{8},$$

le signe devant être choisi convenablement tant dans le premier que dans le second membre. Or, le nombre b étant toujours divisible par quatre, on peut écrire

$$a+b\equiv\pm 1 \pmod{8}$$

où a et b sont maintenant positifs, tandis que le signe du second membre doit être choisi convenablement. On voit que la condition nécessaire *) pour la possibilité de l'équation

$$t^2-2qu^2 = -1,$$

où q désigne un nombre premier de la forme $8n+1$, est qu'on ait $a+b\equiv\pm 1 \pmod{8}$, c. à. d. **) soit $q=16n+9$, $2^{\frac{q-1}{4}}\equiv -1 \pmod{q}$; soit $q=16n+1$, $2^{\frac{q-1}{4}}\equiv 1 \pmod{q}$.

En réunissant ce résultat à ceux que l'illustre arithméticien obtient dans son mémoire, on arrive à la proposition énoncée. Nous n'insisterons pas sur les autres cas abordés par *Lejeune Dirichlet*, car nous nous proposons d'y revenir dans la suite du présent article avec le sujet de laquelle ces cas ont plus de rapport qu'avec celui du travail que nous publions aujourd'hui. En effet, nous nous bornerons pour le moment à l'étude de l'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

où q désigne un nombre premier de la forme $4n+1$.

1.

Le cas où $q=8n+5$ n'offre aucune difficulté. En effet, 2 et -2 étant alors des non-résidus quadratiques de q, la forme

$$(1,\ E\sqrt{2q^2},\ \{E\sqrt{2q^2}\}^2-2q^2)$$

*) La condition n'est pas suffisante, c'est ainsi que pour $D=2.1153$ on a bien $1153=33^2+8^2$ et par conséquent $a+b\equiv 1 \pmod{8}$, et cependant l'équation

$$t^2-2306u^2 = -1$$

est impossible. En effet, la période de la forme principale se compose, pour ce déterminant, des formes $(1, 48, -2)$, $(-2, 48, 1)$.

**) *Lejeune Dirichlet. Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen* (Abh. der Berl. Ak. Aus dem Jahre 1833).

ne peut être équivalente ni à

$$\left(2,\ 2E\sqrt{\frac{q^2}{2}},\ 2\left\{E\sqrt{\frac{q^2}{2}}\right\}^2-q\right),\ \text{ni à}\ \left(-2,\ 2E\sqrt{\frac{q^2}{2}},\ q^2-2\left\{E\sqrt{\frac{q^2}{2}}\right\}^2\right);$$

elle le sera, par conséquent, à la forme *)

$$(-1,\ E\sqrt{2q^2},\ 2q^2-\{E\sqrt{2q^2}\}^2).$$

L'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

est donc toujours possible quand q est un nombre premier de la forme $8n+5$.

Le cas où q est un nombre premier de la forme $8n+1$ présente beaucoup plus de difficultés **). La plus petite solution positive de l'équation

$$t^2-2u^2 = -1$$

étant $t=1$, $u=1$, toutes les solutions positives tant de l'équation

$$t^2-2u^2 = -1$$

que de l'équation

$$t^2-2u^2 = 1$$

s'obtiendront par la formule

$$(1+\sqrt{2})^s = t_s+u_s\sqrt{2},$$

l'indice s désignant un nombre entier et positif. Les solutions de l'équation

$$t^2-2u^2 = -1$$

correspondront d'ailleurs aux indices impairs et celles de l'équation

$$t^2-2u^2 = 1$$

aux indices pairs.

Désignons par σ le moindre indice positif pour lequel on a

$$u_\sigma \equiv 0 \pmod{q},$$

tous les indices τ pour lesquels on aura

$$u_\tau \equiv 0 \pmod{q}$$

seront divisibles par σ, ce qui peut se démontrer comme au § 5 de notre travail sur les déterminants irréguliers publié ici-même ***). On obtient

*) Comp. D. A. art. 258, III; 231, III; 187, 8 et 9.

**) A partir d'ici nous désignerons toujours par q un nombre premier de la forme $8n+1$.

***) T. XCVI, p. 335.

immédiatement, en développant par la formule du binôme:

$$(1+\sqrt{2})^q \equiv 1+\sqrt{2} \pmod{q},$$

ce qui veut dire qu'en posant

$$(1+\sqrt{2})^q = t_q+u_q\sqrt{2},$$

on aura

$$t_q \equiv 1, \quad u_q \equiv 1 \pmod{q},$$

d'où l'on tire, comme au § 5 de notre travail déjà cité:

$$u_{q-1} \equiv 0 \pmod{q}$$

et par conséquent

$$q \equiv 1 \pmod{\sigma}.$$

L'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

est possible ou non suivant que σ est impair ou pair.

La première partie de la proposition est évidente; car en faisant

$$t = t_\sigma, \; u = \frac{u_\sigma}{q},$$

on obtient bien une solution de l'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1.$$

Pour rendre évidente la seconde partie de la proposition, il suffit de faire remarquer que si σ était pair et l'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

admettait une solution positive *) T, U, on devrait avoir

$$T = t_\tau, \quad qU = u_\tau$$

où τ serait impair, ce qui est absurde, le nombre τ devant être divisible par σ. Désignons par 2^μ la plus haute puissance de 2 qui divise $q-1$, la condition nécessaire et suffisante pour que σ soit impair est qu'on ait

$$U_{\frac{q-1}{2^\mu}} \equiv 0 \pmod{q}$$

ou, si l'on veut,

---

*) D'une solution quelconque de l'équation $t^2-Du^2=-1$, on peut toujours déduire une solution positive en changeant les signes d'une manière convenable, car aucun des nombres t, u ne peut être égal à zéro pour une valeur non-carrée de D.

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{\frac{q-1}{2^\mu}}-(1-\sqrt{2})^{\frac{q-1}{2^\mu}}}{2\sqrt{2}}\equiv 0 \pmod{q}.$$

Or, en désignant par r une quelconque des deux solutions de la congruence

$$r^2\equiv 2 \pmod{q},$$

on peut remplacer la congruence que nous venons d'obtenir par la suivante

$$\frac{(1+r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}-(1-r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}}{2r}\equiv 0 \pmod{q},$$

d'où l'on tire

$$(1+r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}\equiv(1-r)^{\frac{q-1}{2^\mu}} \pmod{q}.$$

Inversement cette dernière congruence entraîne celle de laquelle elle a été tirée, car

$$(1+r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}-(1-r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}$$

est toujours divisible par $2r$ et ce dernier nombre est premier à q. Multiplions maintenant les deux membres de la congruence précédente par $(1+r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}$; nous obtiendrons

$$(1+r)^{\frac{q-1}{2^{\mu-1}}}\equiv -1 \pmod{q},$$

congruence qui, à son tour, entraîne celle de laquelle elle a été déduite, comme on s'en assure facilement en multipliant les deux membres de la dernière congruence par $-(1-r)^{\frac{q-1}{2^\mu}}$. La congruence

$$(1+r)^{\frac{q-1}{2^{\mu-1}}}\equiv -1 \pmod{q},$$

où r désigne la racine qu'on voudra de la congruence $r^2\equiv 2 \pmod{q}$, exprime par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

soit possible. Il s'ensuit que dans le cas où $q=16n+9$, la congruence

$$(1+r)^{\frac{q-1}{4}}\equiv -1 \pmod{q}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$t^2-2q^2u^2 = -1$$

soit possible, tandis que dans le cas où $q=16n+1$, la condition

$$(1+r)^{\frac{q-1}{4}} \equiv 1 \pmod{q}$$

est nécessaire. Elle n'est pas suffisante, car pour $q=1201=75.16+1$, on a

$$336^2 \equiv 2 \pmod{1201}$$

et

$$337^{300} \equiv 534^{1200} \equiv 1 \pmod{1201},$$

et malgré cela l'équation

$$t^2-2.1201^2u^2 = -1$$

est impossible. En effet, l'équation

$$t^2-2.1201^2u^2 = 2$$

est satisfaite par les valeurs

$$t = 36\,112\,819\,942\,067\,130\,572\,000\,700\,250,$$

$$u = 21\,261\,964\,919\,903\,790\,461\,282\,407,$$

ce qui exclut la possibilité de l'équation

$$t^2-2.1201^2u^2 = -1.$$

2.

Pour réunir les deux cas, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$(1+r)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{8}} \pmod{q}.$$

Soit g une racine primitive de q et ω le moindre résidu positif de $g^{\frac{q-1}{8}}$, nous aurons

$$\omega^4+1 \equiv 0 \pmod{q}$$

et par conséquent

$$(1+\omega^2)(1+\omega+\omega^7) \equiv (1+\omega)^2 \pmod{q}.$$

Or puisqu'on a

$$(\omega+\omega^7)^2 \equiv 2 \pmod{q}$$

et r désigne une racine quelconque de la congruence

$$r^2 \equiv 2 \pmod{q},$$

on peut poser

$$\omega+\omega^7 \equiv r \pmod{q}.$$

Nous obtenons ainsi, en désignant par f le moindre résidu positif de ω^2,

$$(1+r)(1+f) \equiv (1+\omega)^2 \pmod{q},$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{q-1}{4}$,

$$(1+r)^{\frac{q-1}{4}}(1+f)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}.$$

On voit que la congruence

$$(1+r)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{8}} \pmod{q}$$

entraîne la suivante

$$(-1)^{\frac{q-1}{8}}(1+f)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$$

et inversement. Il s'agit maintenant de trouver les expressions de $(1+f)^{\frac{q-1}{4}}$ $\pmod{q}$ et de $(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}}$ $\pmod{q}$ pour les substituer dans la congruence précédente.

3.

L'expression de $(1+f)^{\frac{q-1}{4}}$ $\pmod{q}$ s'obtient facilement à l'aide des considérations développées par *Gauss* dans les articles 1—19 de son premier mémoire sur les résidus biquadratiques *). Nous profiterons d'ailleurs d'une remarque de M. *Stieltjes* **). Quant aux notations, nous conserverons toujours celles de *Gauss*, sauf à remplacer p par q et n par $\frac{q-1}{8}$. Cela étant ainsi, la congruence

$$x^{\frac{q-1}{4}} + f \equiv 0 \pmod{q}$$

admettra comme racines tous les nombres de la classe D que nous désignerons d'ailleurs avec *Gauss* par $\delta, \delta', \delta'', \ldots.$ Le nombre de ces nombres étant égal à $\frac{q-1}{4}$, on aura identiquement

$$(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\cdots \equiv x^{\frac{q-1}{4}} + f \pmod{q},$$

---

*) *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio prima* (Comm. soc. reg. scient. Gott. rec., vol. VI).

**) *Sur la théorie des résidus biquadratiques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 2ième série, t. VII, p. 139).

et en faisant $x = -1$

$$(1+\delta)(1+\delta')(1+\delta'')\cdots \equiv 1+f \pmod{q},$$

d'où, en élevant les deux membres de la congruence à la puissance $\frac{q-1}{4}$,

$$f^{(31)+2(32)+3(33)} \equiv (1+f)^{\frac{q-1}{4}} \pmod{q}$$

ou, en introduisant les signes de *Gauss*

$$(-f)^{i+m} \equiv (1+f)^{\frac{q-1}{4}} \pmod{q}$$

et par conséquent

$$(1+f)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (-f)^{\frac{q-1}{8} - \frac{1}{4}b}.$$

4.

Avant de passer à la détermination de la valeur de $(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$, il est bon de rappeler les notions de la théorie des résidus bibiquadratiques dans le domaine des nombres entiers rationnels. Un nombre entier a est dit résidu bibiquadratique d'un nombre entier M, quand il est possible de trouver une puissance huitième h^8 telle qu'on ait

$$a \equiv h^8 \pmod{M}.$$

Si une telle puissance huitième n'existe pas, on dit que a est non-résidu bibiquadratique de M. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où le module est un nombre premier q de la forme $8n+1$ et a n'est pas divisible par q.

Soit g une racine primitive du module q, nous la prendrons pour *base* et nous distribuerons tous les moindres résidus positifs *) dudit module q en huit classes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ suivant que les indices de ces résidus seront congrus respectivement à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (mod. 8). On sait que, la base une fois fixée, chaque nombre premier à q a une infinité d'indices, mais tous ces indices sont congrus (mod. $q-1$) et à plus forte raison (mod. 8), de sorte qu'il est indifférent lequel des indices d'un résidu on choisira pour déterminer la classe à laquelle ce résidu appartient. Comme d'ailleurs les puissances g^0, g, g^2, g^3, ... g^{q-2} forment un système complet de résidus de tous les nombres non divisibles par q et que les moindres résidus positifs de g^0, g^8, g^{16}, ... g^{q-9} appartiennent à la classe $\mathfrak{A}$

*) Le résidu 0 est exclu.

et sont différents entre eux, ceux de g, g^9, g^{17}, ... g^{q-8} appartiennent à la classe 𝔅 et sont différents entre eux et ainsi de suite, il est évident que chaque classe contiendra le même nombre de moindres résidus positifs, notamment $\frac{q-1}{8}$. On voit d'ailleurs facilement que la classe 𝔄 contiendra les résidus bibiquadratiques, la classe 𝔈 ceux des résidus biquadratiques qui ne sont pas en même temps résidus bibiquadratiques; les résidus quadratiques qui ne sont pas en même temps résidus biquadratiques seront partagés également entre les classes ℭ et 𝔊, et enfin les non-résidus quadratiques seront partagés également entre les classes 𝔅, 𝔇, 𝔉, ℌ. Mais il existe un autre critère pour déterminer la classe à laquelle appartient un moindre résidu positif donné h. Désignons par ω le moindre résidu positif de $g^{\frac{q-1}{8}}$ et soit

$$h \equiv g^{\lambda} \pmod{q};$$

on voit que $g^{\lambda\left(\frac{q-1}{8}\right)}$ sera congru à $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7 \pmod{q}$ respectivement suivant que λ est de la forme $8m$, $8m+1$, $8m+2$, $8m+3$, $8m+4$, $8m+5$, $8m+6$, $8m+7$. Il s'ensuit qu'un moindre résidu positif donné h appartient à la classe 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, 𝔉, 𝔊 ou ℌ respectivement suivant que $h^{\frac{q-1}{8}}$ est congru à $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7 \pmod{q}$. Toutes les racines primitives étant des non-résidus quadratiques, il est évident que toutes les racines primitives positives et inférieures à q seront distribuées entre les classes 𝔅, 𝔇, 𝔉, ℌ. Nous allons faire voir que chacune de ces quatre classes contiendra le même nombre de racines primitives. En effet, un système complet de racines primitives $(\text{mod.}\, q)$ correspond à un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$ considérés comme indices desdites racines primitives. Or il résulte de l'art. 38, III des ***Disquisitiones*** que, si l'on désigne par 2^{μ} la plus haute puissance de 2 qui divise $q-1$, il y aura dans un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$ le même nombre de résidus congrus à chacun des nombres $1, 3, 5, 7, \ldots 2^{\mu}-1$ $(\text{mod.}\, 2^{\mu})$. Comme d'ailleurs $\mu \geqq 3$, on en tire la conséquence que, dans un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$, il y en aura le même nombre de congrus à 1, 3, 5, 7 (mod. 8). Chacune des classes 𝔅, 𝔇, 𝔉, ℌ contiendra par conséquent $\frac{\varphi(q-1)}{4}$ racines primitives $(\text{mod.}\, q)$. Or comme

et en faisant $x = -1$

$$(1+\delta)(1+\delta')(1+\delta'')\cdots \equiv 1+f \pmod{q},$$

d'où, en élevant les deux membres de la congruence à la puissance $\frac{q-1}{4}$,

$$f^{(31)+2(32)+3(33)} \equiv (1+f)^{\frac{q-1}{4}} \pmod{q}$$

ou, en introduisant les signes de *Gauss*

$$(-f)^{i+m} \equiv (1+f)^{\frac{q-1}{4}} \pmod{q}$$

et par conséquent

$$(1+f)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (-f)^{\frac{q-1}{8}-\frac{1}{4}b}.$$

4.

Avant de passer à la détermination de la valeur de $(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$, il est bon de rappeler les notions de la théorie des résidus bibiquadratiques dans le domaine des nombres entiers rationnels. Un nombre entier a est dit résidu bibiquadratique d'un nombre entier M, quand il est possible de trouver une puissance huitième h^8 telle qu'on ait

$$a \equiv h^8 \pmod{M}.$$

Si une telle puissance huitième n'existe pas, on dit que a est non-résidu bibiquadratique de M. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où le module est un nombre premier q de la forme $8n+1$ et a n'est pas divisible par q.

Soit g une racine primitive du module q, nous la prendrons pour *base* et nous distribuerons tous les moindres résidus positifs *) dudit module q en huit classes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ suivant que les indices de ces résidus seront congrus respectivement à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (mod. 8). On sait que, la base une fois fixée, chaque nombre premier à q a une infinité d'indices, mais tous ces indices sont congrus (mod. $q-1$) et à plus forte raison (mod. 8), de sorte qu'il est indifférent lequel des indices d'un résidu on choisira pour déterminer la classe à laquelle ce résidu appartient. Comme d'ailleurs les puissances g^0, g, g^2, g^3, ... g^{q-2} forment un système complet de résidus de tous les nombres non divisibles par q et que les moindres résidus positifs de g^0, g^8, g^{16}, ... g^{q-9} appartiennent à la classe $\mathfrak{A}$

*) Le résidu 0 est exclu.

et sont différents entre eux, ceux de $g, g^9, g^{17}, \ldots g^{q-8}$ appartiennent à la classe $\mathfrak{B}$ et sont différents entre eux et ainsi de suite, il est évident que chaque classe contiendra le même nombre de moindres résidus positifs, notamment $\frac{q-1}{8}$. On voit d'ailleurs facilement que la classe $\mathfrak{A}$ contiendra les résidus bibiquadratiques, la classe $\mathfrak{E}$ ceux des résidus biquadratiques qui ne sont pas en même temps résidus bibiquadratiques; les résidus quadratiques qui ne sont pas en même temps résidus biquadratiques seront partagés également entre les classes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{G}$, et enfin les non-résidus quadratiques seront partagés également entre les classes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$. Mais il existe un autre critère pour déterminer la classe à laquelle appartient un moindre résidu positif donné h. Désignons par ω le moindre résidu positif de $g^{\frac{q-1}{8}}$ et soit

$$h \equiv g^{\lambda} \pmod{q};$$

on voit que $g^{\lambda\left(\frac{q-1}{8}\right)}$ sera congru à $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7 \pmod{q}$ respectivement suivant que λ est de la forme $8m$, $8m+1$, $8m+2$, $8m+3$, $8m+4$, $8m+5$, $8m+6$, $8m+7$. Il s'ensuit qu'un moindre résidu positif donné h appartient à la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ou $\mathfrak{H}$ respectivement suivant que $h^{\frac{q-1}{8}}$ est congru à $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7 \pmod{q}$. Toutes les racines primitives étant des non-résidus quadratiques, il est évident que toutes les racines primitives positives et inférieures à q seront distribuées entre les classes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$. Nous allons faire voir que chacune de ces quatre classes contiendra le même nombre de racines primitives. En effet, un système complet de racines primitives $(\text{mod.}\, q)$ correspond à un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$ considérés comme indices desdites racines primitives. Or il résulte de l'art. 38, III des *Disquisitiones* que, si l'on désigne par 2^{μ} la plus haute puissance de 2 qui divise $q-1$, il y aura dans un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$ le même nombre de résidus congrus à chacun des nombres $1, 3, 5, 7, \ldots 2^{\mu}-1$ $(\text{mod.}\, 2^{\mu})$. Comme d'ailleurs $\mu \geqq 3$, on en tire la conséquence que, dans un système complet de moindres résidus positifs premiers à $q-1$ $(\text{mod.}\, q-1)$, il y en aura le même nombre de congrus à $1, 3, 5, 7 \pmod{8}$. Chacune des classes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ contiendra par conséquent $\frac{\varphi(q-1)}{4}$ racines primitives $(\text{mod.}\, q)$. Or comme



5.

Quelques exemples rendront plus clairs tant les développements q
précèdent que ceux qui vont suivre. Nous donnons la distribution d
moindres résidus positifs en classes pour tous les modules q inférieurs à 20
C'est toujours la plus petite des racines primitives positives que nous preno
pour base.

$$q = 17,$$
$$g = 3, \quad \omega = 9, \quad f = 13.$$

𝔄	1,	16.
𝔅	3,	14.
ℭ	8,	9.
𝔇	7,	10.
𝔈	4,	13.
𝔉	5,	12.
𝔊	2,	15.
ℌ	6,	11.

$$q = 41,$$
$$g = 6, \quad \omega = 27, \quad f = 32.$$

𝔄	1,	10,	16,	18,	37.
𝔅	6,	14,	17,	19,	26.
ℭ	2,	20,	32,	33,	36.
𝔇	11,	12,	28,	34,	38.
𝔈	4,	23,	25,	31,	40.
𝔉	15,	22,	24,	27,	35.
𝔊	5,	8,	9,	21,	39.
ℌ	3,	7,	13,	29,	30.

$$q = 73,$$
$$g = 5, \quad \omega = 10, \quad f = 27.$$

𝔄	1,	2,	4,	8,	16,	32,	37,	55,	64.
𝔅	5,	7,	10,	14,	20,	28,	39,	40,	56.
ℭ	25,	27,	35,	49,	50,	54,	61,	67,	70.
𝔇	13,	26,	29,	31,	43,	51,	52,	58,	62.
𝔈	9,	18,	36,	41,	57,	65,	69,	71,	72.
𝔉	17,	33,	34,	45,	53,	59,	63,	66,	68.
𝔊	3,	6,	12,	19,	23,	24,	38,	46,	48.
ℌ	11,	15,	21,	22,	30,	42,	44,	47,	60.

$$q = 89,$$

$$g=3, \quad \omega=37, \quad f=34.$$

$\mathfrak{A}$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 39, 45, 64, 67, 78.
$\mathfrak{B}$ 3, 6, 7, 12, 14, 23, 24, 28, 46, 48, 56.
$\mathfrak{C}$ 9, 18, 21, 36, 42, 49, 55, 69, 72, 79, 84.
$\mathfrak{D}$ 19, 27, 29, 37, 38, 54, 58, 59, 63, 74, 76.
$\mathfrak{E}$ 11, 22, 25, 44, 50, 57, 73, 81, 85, 87, 88.
$\mathfrak{F}$ 33, 41, 43, 61, 65, 66, 75, 77, 82, 83, 86.
$\mathfrak{G}$ 5, 10, 17, 20, 34, 40, 47, 53, 68, 71, 80.
$\mathfrak{H}$ 13, 15, 26, 30, 31, 35, 51, 52, 60, 62, 70.

$$q = 97,$$

$$g=5, \quad \omega=64, \quad f=22.$$

$\mathfrak{A}$ 1, 6, 16, 22, 35, 36, 61, 62, 75, 81, 91, 96.
$\mathfrak{B}$ 5, 13, 14, 17, 19, 30, 67, 78, 80, 83, 84, 92.
$\mathfrak{C}$ 2, 12, 25, 27, 32, 44, 53, 65, 70, 72, 85, 95.
$\mathfrak{D}$ 10, 26, 28, 34, 37, 38, 59, 60, 63, 69, 71, 87.
$\mathfrak{E}$ 4, 9, 24, 33, 43, 47, 50, 54, 64, 73, 88, 93.
$\mathfrak{F}$ 20, 21, 23, 29, 41, 45, 52, 56, 68, 74, 76, 77.
$\mathfrak{G}$ 3, 8, 11, 18, 31, 48, 49, 66, 79, 86, 89, 94.
$\mathfrak{H}$ 7, 15, 39, 40, 42, 46, 51, 55, 57, 58, 82, 90.

$$q = 113,$$

$$g=3, \quad \omega=18, \quad f=98.$$

$\mathfrak{A}$ 1, 4, 7, 16, 28, 30, 49, 64, 83, 85, 97, 106, 109, 112.
$\mathfrak{B}$ 3, 12, 21, 23, 29, 34, 48, 65, 79, 84, 90, 92, 101, 110.
$\mathfrak{C}$ 9, 11, 26, 31, 36, 44, 50, 63, 69, 77, 82, 87, 102, 104.
$\mathfrak{D}$ 5, 19, 20, 27, 33, 35, 37, 76, 78, 80, 86, 93, 94, 108.
$\mathfrak{E}$ 2, 8, 14, 15, 32, 53, 56, 57, 60, 81, 98, 99, 105, 111.
$\mathfrak{F}$ 6, 17, 24, 42, 45, 46, 55, 58, 67, 68, 71, 89, 96, 107.
$\mathfrak{G}$ 13, 18, 22, 25, 41, 51, 52, 61, 62, 72, 88, 91, 95, 100.
$\mathfrak{H}$ 10, 38, 39, 40, 43, 47, 54, 59, 66, 70, 73, 74, 75, 103.

$q = 137$,

$g = 3, \quad \omega = 127, \quad f = 100$.

𝔄 1, 16, 34, 38, 50, 56, 59, 60, 72, 73, 74, 88, 115, 119, 122, 123, 133.

𝔅 3, 13, 31, 40, 43, 48, 71, 79, 82, 83, 85, 92, 95, 102, 114, 125, 127.

ℭ 2, 7, 9, 11, 32, 39, 68, 76, 93, 100, 101, 107, 109, 112, 118, 120, 129.

𝔇 5, 6, 21, 26, 27, 29, 33, 47, 53, 62, 67, 80, 86, 91, 96, 113, 117.

𝔈 4, 14, 15, 18, 22, 49, 63, 64, 65, 77, 78, 81, 87, 99, 103, 121, 136.

𝔉 10, 12, 23, 35, 42, 45, 52, 54, 55, 58, 66, 89, 94, 97, 106, 124, 134.

𝔊 8, 17, 19, 25, 28, 30, 36, 37, 44, 61, 69, 98, 105, 126, 128, 130, 135.

ℌ 20, 24, 41, 46, 51, 57, 70, 75, 84, 90, 104, 108, 110, 111, 116, 131, 132.

$q = 193$,

$g = 5, \quad \omega = 43, \quad f = 112$.

𝔄 1, 7, 9, 12, 16, 43, 49, 55, 63, 81, 84, 85, 108, 109, 112, 130, 138, 144, 150, 177, 181, 184, 186, 192.

𝔅 5, 19, 22, 34, 35, 39, 45, 52, 60, 71, 80, 82, 111, 113, 122, 133, 141, 148, 154, 158, 159, 171, 174, 188.

ℭ 2, 14, 18, 23, 24, 25, 31, 32, 67, 83, 86, 95, 98, 107, 110, 126, 161, 162, 168, 169, 170, 175, 179, 191.

𝔇 10, 29, 33, 38, 44, 51, 68, 70, 73, 78, 89, 90, 103, 104, 115, 120, 123, 125, 142, 149, 155, 160, 164, 183.

𝔈 3, 4, 21, 27, 28, 36, 46, 48, 50, 59, 62, 64, 129, 131, 134, 143, 145, 147, 157, 165, 166, 172, 189, 190.

𝔉 13, 15, 20, 37, 47, 53, 57, 58, 66, 76, 88, 91, 102, 105, 117, 127, 135, 136, 140, 146, 156, 173, 178, 180.

𝔊 6, 8, 42, 54, 56, 65, 69, 72, 75, 92, 93, 96, 97, 100, 101, 118, 121, 124, 128, 137, 139, 151, 185, 187.

ℌ 11, 17, 26, 30, 40, 41, 61, 74, 77, 79, 87, 94, 99, 106, 114, 116, 119, 132, 152, 153, 163, 167, 176, 182.

6.

Désignons par [00], [01], [02], [03], [04], [05], [06], [07] respectivement le nombre des nombres de la classe *) $\mathfrak{A}$ qui sont suivis immédiatement d'un nombre de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$; de même désignons par [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] respectivement le nombre des nombres de la classe $\mathfrak{B}$ qui sont suivis immédiatement d'un nombre de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ et ainsi de suite. Voici d'ailleurs les valeurs numériques des termes du Tableau:

[00]	[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]
[10]	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]
[20]	[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]
[30]	[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]
[40]	[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]
[50]	[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]
[60]	[61]	[62]	[63]	[64]	[65]	[66]	[67]
[70]	[71]	[72]	[73]	[74]	[75]	[76]	[77]

pour les modules qui nous ont servi d'exemples.

$q = 17$.

0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0

$q = 41$.

0	2	1	2	0	0	0	0
1	0	1	0	0	2	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	2
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	2	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	2	0	1	1

*) Les classes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont considérées comme ne se composant que de moindres résidus positifs (mod. q).

$q = 73.$

1	2	0	0	2	2	2	0
1	1	0	1	2	0	1	3
1	1	1	3	2	1	0	0
1	1	1	1	0	3	0	2
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	3	0	2	1	1	1
1	3	2	1	0	0	1	1
1	0	1	2	0	1	3	1

$q = 89.$

1	2	2	0	0	2	4	0
2	2	1	1	2	0	1	2
0	1	0	2	4	1	2	1
2	1	1	2	0	2	1	2
1	2	0	2	1	2	0	2
2	0	2	1	2	2	1	1
0	2	4	1	2	1	0	1
2	1	1	2	0	1	2	2

$q = 97.$

2	2	1	2	0	2	0	2
2	2	1	0	1	2	3	1
1	1	0	3	3	1	3	0
2	0	3	2	2	1	1	1
0	1	3	2	0	1	3	2
2	2	1	1	1	2	0	3
0	3	3	1	3	0	1	1
2	1	0	1	2	3	1	2

$q = 113.$

0	4	2	2	3	2	0	0
4	0	1	3	1	1	3	1
2	1	0	3	2	1	2	3
2	3	3	2	1	1	1	1
3	1	2	1	3	1	2	1
2	1	1	1	1	2	3	3
0	3	2	1	2	3	2	1
0	1	3	1	1	3	1	4

$q = 137.$

4	0	3	0	0	4	2	4
2	1	2	3	4	0	3	2
1	3	1	2	2	3	3	2
1	3	3	2	4	2	2	0
4	2	1	1	4	2	1	1
2	4	2	2	0	1	3	3
1	2	2	3	3	2	1	3
1	2	3	4	0	3	2	2

$q = 193.$

2	2	3	2	4	2	6	2
2	2	3	5	5	2	2	3
3	3	6	2	1	3	1	5
2	5	2	2	2	3	3	5
4	5	1	2	4	5	1	2
2	2	3	3	5	2	5	2
6	2	1	3	1	5	3	3
2	3	5	5	2	2	3	2

Pour les développements qui vont suivre, il convient de traiter séparément les modules de la forme $16n+1$ et ceux qui sont de la forme $16n+9$. Nous commencerons par les premiers.

7.

Le symbole [00] indique de combien de manières différentes on peut satisfaire à l'équation $\alpha+1=\alpha'$ où α, α' désignent indéfiniment des nombres de la classe $\mathfrak{A}$. Comme pour les modules q de la forme $16n+1$, α' et $q-\alpha'$ appartiennent à la même classe, on peut dire aussi que [00] indique de combien de manières différentes il est possible de satisfaire à l'équation

$$1+\alpha+\alpha' = q.$$

Cette dernière équation peut d'ailleurs être remplacée par la congruence

$$1+\alpha+\alpha' \equiv 0 \pmod{q}.$$

De même

[01] indique le nombre des solutions de la congruence $1+\alpha+\beta \equiv 0 \pmod{q}$,
[02] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\gamma \equiv 0 \pmod{q}$,
[03] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\delta \equiv 0 \pmod{q}$,
[04] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\varepsilon \equiv 0 \pmod{q}$,
[05] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\zeta \equiv 0 \pmod{q}$,
[06] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\eta \equiv 0 \pmod{q}$,
[07] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\alpha+\theta \equiv 0 \pmod{q}$,
[10] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\beta+\alpha \equiv 0 \pmod{q}$,
[11] „ „ „ „ „ „ „ „ $1+\beta+\beta' \equiv 0 \pmod{q}$,
. . . .
. . . .

où β et β', γ et γ', δ et δ', ε et ε', ζ et ζ', η et η', θ et θ' désignent indéfiniment des nombres de la classe $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ respectivement.

On en tire immédiatement les vingt-huit relations suivantes

[01] = [10], [02] = [20], [03] = [30], [04] = [40], [05] = [50], [06] = [60],
[07] = [70], [12] = [21], [13] = [31], [14] = [41], [15] = [51], [16] = [61],
[17] = [71], [23] = [32], [24] = [42], [25] = [52], [26] = [62], [27] = [72],
[34] = [43], [35] = [53], [36] = [63], [37] = [73], [45] = [54], [46] = [64],
[47] = [74], [56] = [65], [57] = [75], [67] = [76].

D'une solution donnée de la congruence

$$1+\alpha+\beta\equiv 0 \pmod{q}$$

se déduit immédiatement une solution de la congruence

$$1+\theta+\theta'\equiv 0 \pmod{q},$$

en désignant par θ le nombre de la classe $\mathfrak{H}$ qui donne $\beta\theta\equiv 1 \pmod{q}$ et par θ' le moindre résidu positif de $\alpha\theta$. Ce résidu appartiendra évidemment à la classe $\mathfrak{H}$. Inversement d'une solution donnée de la congruence

$$1+\theta+\theta'\equiv 0 \pmod{q}$$

on peut déduire une solution de la congruence

$$1+\alpha+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$

en désignant par β le nombre de la classe $\mathfrak{B}$ qui donne $\beta\theta\equiv 1 \pmod{q}$ et par α le moindre résidu positif de $\beta\theta'$. On en conclut que les deux congruences ont le même nombre de solutions, c. à d. qu'on a

$$[01] = [77].$$

De même de la congruence

$$1+\alpha+\gamma\equiv 0 \pmod{q}$$

on déduit la congruence

$$1+\eta+\eta'\equiv 0 \pmod{q},$$

en déterminant η de manière qu'on ait $\eta\gamma\equiv 1 \pmod{q}$ et en posant $\alpha\eta\equiv\eta' \pmod{q}$. Il s'ensuit que les deux congruences ont le même nombre de solutions et par conséquent

$$[02] = [66].$$

On démontre de la même manière que les congruences placées sur la même ligne horizontale dans le Tableau suivant ont le même nombre de solutions:

$1+\alpha+\delta\equiv 0$ et $1+\zeta+\zeta'\equiv 0$;
$1+\alpha+\varepsilon\equiv 0$ et $1+\varepsilon'+\varepsilon''\equiv 0$;
$1+\alpha+\zeta\equiv 0$ et $1+\delta+\delta'\equiv 0$;
$1+\alpha+\eta\equiv 0$ et $1+\gamma+\gamma'\equiv 0$;
$1+\alpha+\theta\equiv 0$ et $1+\beta+\beta'\equiv 0$;

$$1+\beta+\gamma\equiv 0,\quad 1+\beta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\theta\equiv 0;$$
$$1+\beta+\delta\equiv 0,\quad 1+\gamma+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\eta\equiv 0;$$
$$1+\beta+\varepsilon\equiv 0,\quad 1+\delta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\zeta\equiv 0;$$
$$1+\beta+\zeta\equiv 0,\quad 1+\varepsilon+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\delta+\varepsilon\equiv 0;$$
$$1+\beta+\eta\equiv 0,\quad 1+\zeta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\gamma+\delta\equiv 0;$$
$$1+\gamma+\varepsilon\equiv 0,\quad 1+\gamma+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\eta\equiv 0;$$
$$1+\gamma+\zeta\equiv 0,\quad 1+\delta+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\delta+\zeta\equiv 0.$$

Nous obtenons ainsi les 21 relations suivantes:

$$[01]=[77],\quad [02]=[66],\quad [03]=[55],$$
$$[04]=[44],\quad [05]=[33],\quad [06]=[22],$$
$$[07]=[11],\quad [12]=[17]=[67],$$
$$[13]=[27]=[56],\quad [14]=[37]=[45],$$
$$[15]=[47]=[34],\quad [16]=[57]=[23],$$
$$[24]=[26]=[46],\quad [25]=[36]=[35].$$

En y joignant les vingt-huit relations obtenues précédemment, on obtient quarante-neuf relations qui permettent de réduire nos soixante-quatre indéterminées à quinze comme le montre le Tableau suivant dont les termes correspondent à ceux du Tableau que nous avons donné dans le § 6.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
II	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	IX
III	IX	VII	XIII	XIV	XV	XIV	X
IV	X	XIII	VI	XII	XV	XV	XI
V	XI	XIV	XII	V	XI	XIV	XII
VI	XII	XV	XV	XI	IV	X	XIII
VII	XIII	XIV	XV	XIV	X	III	IX
VIII	IX	X	XI	XII	XIII	IX	II

8.

Nous allons maintenant exprimer les symboles que *Gauss* considère dans les art. 15—19 *), à l'aide de ceux que nous venons d'introduire. On

*) *Theoria residuorum biquadraticorum,* Commentatio prima.

obtient immédiatement en conservant la notation de *Gauss*, sauf que le nombre premier q a pris la place de p:

$$\begin{aligned}
(00) &= [00]+[04]+[40]+[44],\\
(01) &= [01]+[05]+[41]+[45],\\
(02) &= [02]+[06]+[42]+[46],\\
(03) &= [03]+[07]+[43]+[47],\\
(10) &= [10]+[14]+[50]+[54],\\
(11) &= [11]+[15]+[51]+[55],\\
(12) &= [12]+[16]+[52]+[56],\\
(13) &= [13]+[17]+[53]+[57],\\
(20) &= [20]+[24]+[60]+[64],\\
(21) &= [21]+[25]+[61]+[65],\\
(22) &= [22]+[26]+[62]+[66],\\
(23) &= [23]+[27]+[63]+[67],\\
(30) &= [30]+[34]+[70]+[74],\\
(31) &= [31]+[35]+[71]+[75],\\
(32) &= [32]+[36]+[72]+[76],\\
(33) &= [33]+[37]+[73]+[77]
\end{aligned}$$

d'où, en introduisant les signes de *Gauss* et les nôtres:

$$\begin{aligned}
h &= \mathrm{I}+3\mathrm{V},\\
i &= \mathrm{II}+\mathrm{VI}+2\mathrm{XI},\\
k &= \mathrm{III}+\mathrm{VII}+2\mathrm{XIV},\\
l &= \mathrm{IV}+\mathrm{VIII}+2\mathrm{XII},\\
m &= \mathrm{IX}+\mathrm{X}+\mathrm{XIII}+\mathrm{XV}.
\end{aligned}$$

9.

Nous désignerons par $[0R]$, $[1R]$, $[2R]$, $[3R]$, $[4R]$, $[5R]$, $[6R]$, $[7R]$ respectivement le nombre des nombres de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ qui sont suivis immédiatement d'un résidu quadratique, et de même nous désignerons par $[0N]$, $[1N]$, $[2N]$, $[3N]$, $[4N]$, $[5N]$, $[6N]$, $[7N]$ le nombre des nombres de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ qui sont suivis immédiatement d'un non-résidu quadratique. En comparant ces nouveaux symboles à ceux que nous avons introduits au § 6, on obtient immédiatement:

$$
\begin{aligned}
[0R] &= [00]+[02]+[04]+[06],\\
[1R] &= [10]+[12]+[14]+[16],\\
[2R] &= [20]+[22]+[24]+[26],\\
[3R] &= [30]+[32]+[34]+[36],\\
[4R] &= [40]+[42]+[44]+[46],\\
[5R] &= [50]+[52]+[54]+[56],\\
[6R] &= [60]+[62]+[64]+[66],\\
[7R] &= [70]+[72]+[74]+[76],\\
[0N] &= [01]+[03]+[05]+[07],\\
[1N] &= [11]+[13]+[15]+[17],\\
[2N] &= [21]+[23]+[25]+[27],\\
[3N] &= [31]+[33]+[35]+[37],\\
[4N] &= [41]+[43]+[45]+[47],\\
[5N] &= [51]+[53]+[55]+[57],\\
[6N] &= [61]+[63]+[65]+[67],\\
[7N] &= [71]+[73]+[75]+[77],
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&[2R] = [6R] = k,\\
&[2N] = [6N] = m,\\
&[1R] = [7N],\\
&[3R] = [5N],\\
&[5R] = [3N],\\
&[7R] = [1N],\\
&[0R]+[4R] = h+k,\\
&[0N]+[4N] = i+l,\\
&[3R]+[7R] = l+m,\\
&[3N]+[7N] = i+m.
\end{aligned}
$$

Nous désignerons par $[R0]$, $[R1]$, $[R2]$, $[R3]$, $[R4]$, $[R5]$, $[R6]$, $[R7]$ le nombre des résidus quadratiques compris entre 1 et $q-1$ inclusivement et suivis immédiatement d'un nombre de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$; nous désignerons de même par $[N0]$, $[N1]$, $[N2]$, $[N3]$, $[N4]$, $[N5]$, $[N6]$, $[N7]$ le nombre des non-résidus quadratiques compris entre 1 et $q-1$ et suivis immédiatement d'un nombre de la classe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$. On obtient, sans difficulté, à l'aide des nombres [00], [01], [02], etc., les relations suivantes:

$$[0R]=[R0];\quad [1R]=[R1];\quad [2R]=[R2];\quad [3R]=[R3];$$
$$[4R]=[R4];\quad [5R]=[R5];\quad [6R]=[R6];\quad [7R]=[R7];$$
$$[0N]=[N0];\quad [1N]=[N1];\quad [2N]=[N2];\quad [3N]=[N3];$$
$$[4N]=[N4];\quad [5N]=[N5];\quad [6N]=[N6];\quad [7N]=[N7].$$

Désignons enfin par $[RR]$, $[RN]$ le nombre des résidus quadratiques compris entre 1 et $q-1$ inclusivement et suivis immédiatement d'un résidu quadratique, d'un non-résidu quadratique; de même $[NR]$, $[NN]$ désignera le nombre des non-résidus quadratiques compris entre 1 et $q-1$ et suivis immédiatement d'un résidu quadratique, d'un non-résidu quadratique. Ces nombres ont été considérés par *Gauss* dans l'art. 356 de ses *Disquisitiones arithmeticae*. *Gauss* obtient

$$[NR]=[NN]=\frac{q-1}{4}.$$

Or si N est un non-résidu suivi d'un résidu $N+1=R$, $q-R$ sera un résidu suivi d'un non-résidu $q-N$. On en déduit facilement la relation

$$[NR]=[RN]=\frac{q-1}{4}.$$

Enfin comme chaque résidu quadratique compris entre 1 et $q-1$ inclusivement, sauf le résidu $q-1$, est suivi immédiatement soit d'un résidu quadratique, soit d'un non-résidu quadratique, on a

$$[RR]+[RN] = \frac{q-3}{2},$$

d'où

$$[RR] = \frac{q-5}{4}.$$

D'ailleurs comme tout nombre tant de la classe $\mathfrak{D}$ que de la classe $\mathfrak{C}$ doit être suivi immédiatement soit d'un résidu quadratique soit d'un non-résidu quadratique, on obtient

$$[3R]+[3N] = 2n,$$
$$[4R]+[4N] = 2n$$

où nous avons remplacé $\frac{q-1}{16}$ par n, comme nous le ferons souvent dans la suite.

Cela étant ainsi, cherchons le nombre des solutions de la congruence

$$1+\alpha+N+R\equiv 0 \pmod{q}$$

où α, R, N désigne indéfiniment un nombre de la classe $\mathfrak{A}$, un résidu

quadratique compris entre 1 et $q-1$ inclusivement, un non-résidu quadratique compris entre 1 et $q-1$. On voit d'abord que, q 1 étant un résidu quadratique, le nombre $1+N$ appartiendra nécessairement à une des classes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$. Toutes les fois que $1+N$ appartient à la classe $\mathfrak{A}$, dans quel cas on a $1+N=\alpha^0$ par exemple, la congruence

$$\alpha^0+\alpha+R\equiv 0 \pmod{q}$$

admet autant de solutions que la suivante

$$1+\alpha'+R'\equiv 0 \pmod{q}$$

qu'on obtient en posant

$$\alpha\equiv\alpha^0\alpha',\quad R\equiv\alpha^0 R',$$

c. à. d. $[0R]$ solutions. De même, toutes les fois que $1+N$ appartient à la classe $\mathfrak{B}$ et que l'on a $1+N=\beta^0$ par exemple, la congruence

$$\beta^0+\alpha+R\equiv 0 \pmod{q}$$

a autant de solutions que la suivante

$$1+\theta+N'\equiv 0 \pmod{q}$$

qu'on obtient en posant

$$\theta\beta^0\equiv\alpha,\quad \beta^0 N'\equiv R \pmod{q},$$

c. à. d. $[7N]=[1R]$ solutions.

De même, toutes les fois que $1+N$ appartient à la classe $\mathfrak{C}$ et que l'on a $1+N=\gamma^0$ par exemple, la congruence

$$\gamma^0+\alpha+R\equiv 0 \pmod{q}$$

a autant de solutions que la suivante

$$1+\eta+R'\equiv 0 \pmod{q}$$

qu'on obtient en posant

$$\gamma^0\eta\equiv\alpha,\quad \gamma^0 R'\equiv R \pmod{q},$$

c. à. d. $[6R]=[2R]$ solutions. En continuant de la même manière, on obtient, comme nombre des solutions de la congruence

$$1+\alpha+N+R\equiv 0 \pmod{q},$$

l'expression

$$[0R][0N]+[1R][1N]+[2R][2N]+[3R][3N]+[4R][4N]+[5R][5N]$$
$$+[6R][6N]+[7R][7N].$$

Nous allons maintenant obtenir une autre expression du même nombre en

partant de la considération des valeurs que peut prendre $1+\alpha$. Faisons remarquer d'abord qu'on ne peut faire $\alpha=q-1$, ce qui conduirait à la congruence absurde

$$N+R\equiv 0 \pmod{q}.$$

Soit $1+\alpha=R^0$, la congruence

$$R^0+N+R\equiv 0 \pmod{q}$$

aura autant de solutions que la suivante

$$1+N'+R'\equiv 0 \pmod{q}$$

qu'on obtient en posant

$$R^0N'\equiv N,\quad R^0R'\equiv R \pmod{q},$$

c. à. d. $[NR]$ solutions. De même, quand $1+\alpha=N^0$, la congruence

$$N^0+N+R\equiv 0 \pmod{q}$$

aura autant de solutions que la suivante

$$1+R'+N'\equiv 0 \pmod{q}$$

qu'on obtient en posant

$$N^0R'\equiv N,\quad N^0N'\equiv R \pmod{q},$$

c. à. d. $[NR]$ solutions.

Nous obtenons ainsi, comme nombre des solutions de la congruence

$$1+\alpha+N+R\equiv 0 \pmod{q},$$

l'expression

$$[NR]\{[0R]+[0N]\} = 4n(2n-1).$$

D'où l'on tire la relation

$$\begin{aligned}&[0R][0N]+[1R][1N]+[2R][2N]+[3R][3N]\\ &+[4R][4N]+[5R][5N]+[6R][6N]+[7R][7N]\\ &=4n(2n-1)=8n^2-4n.\end{aligned}$$

Nous allons rechercher d'une manière analogue le nombre des solutions de la congruence

$$1+\varepsilon+R+R'\equiv 0 \pmod{q}.$$

D'abord on peut faire $R=q-1$ et la congruence précédente se réduit alors à la suivante

$$\varepsilon+R'\equiv 0 \pmod{q}$$

qui, pour toute valeur de ε, donne la valeur correspondante de R', de sorte

qu'on obtient ainsi $2n$ solutions. Hormis ce cas, $1+R$ appartiendra à une des classes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, et en se servant de considérations analogues à celles que nous avons déjà employées, on obtient, comme nombre des solutions de la congruence

$$1+\varepsilon+R+R' \equiv 0 \pmod{q},$$

l'expression

$$2n+2[0R][4R]+2[1R][5R]+2[2R][6R]+2[3R][7R].$$

D'un autre côté, en partant des valeurs de $1+\varepsilon$, on obtient pour le même nombre l'expression

$$[RR][4R]+[NN][4N],$$

ce qui nous conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}&[0R][4R]+[1R][5R]+[2R][6R]+[3R][7R]\\&\quad = -n+\tfrac{1}{2}[RR][4R]+\tfrac{1}{2}[NN][4N].\end{aligned}$$

De même la congruence

$$1+\varepsilon+N+N' \equiv 0 \pmod{q}$$

nous conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}&[0N][4N]+[1N][5N]+[2N][6N]+[3N][7N]\\&\quad = \tfrac{1}{2}[RR][4N]+\tfrac{1}{2}[NN][4R].\end{aligned}$$

En l'ajoutant à la précédente on obtient

$$\begin{aligned}&[0R][4R]+[1R][5R]+[2R][6R]+[3R][7R]\\&+[0N][4N]+[1N][5N]+[2N][6N]+[3N][7N]\\&= -n+\tfrac{1}{2}\{[RR]+[NN]\}\{[4R]+[4N]\}\\&= -n+\tfrac{1}{2}(8n-1).2n = 8n^2-2n.\end{aligned}$$

En ajoutant enfin à cette dernière égalité celle que nous avons obtenue précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}&[0R][0N]+[4R][4N]+[0R][4R]+[0N][4N]\\&+[2R][2N]+[6R][6N]+[2R][6R]+[2N][6N]\\&+[3R][3N]+[7R][7N]+[3R][7R]+[3N][7N]\\&+[1R][1N]+[5R][5N]+[1R][5R]+[1N][5N]\\&= 16n^2-6n.\end{aligned}$$

D'un autre côté on a évidemment

$$[0R]+[4N]+[0N]+[4R] = 4n-1,$$
$$[2R]+[6N]+[2N]+[6R] = 4n,$$
$$[3R]+[7N]+[3N]+[7R] = 4n,$$
$$[1R]+[5N]+[1N]+[5R] = 4n.$$

Or en élevant ces quatre relations au carré et en retranchant de la somme des résultats ainsi obtenus le quadruple de l'égalité à laquelle nous sommes parvenus tout à l'heure, on obtient *)

$$\begin{aligned} &\{[0R]+[4N]-[0N]-[4R]\}^2 \\ &+\{[2R]+[6N]-[2N]-[6R]\}^2 \\ &+\{[3R]+[7N]-[3N]-[7R]\}^2 \\ &+\{[1R]+[5N]-[1N]-[5R]\}^2 \\ &= 16n+1 = q. \end{aligned}$$

D'où, en remarquant que le second carré est identiquement nul et que le quatrième est égal au troisième:

$$\begin{aligned} q = &\{[0R]+[4N]-[0N]-[4R]\}^2 \\ &+2\{[3R]+[7N]-[3N]-[7R]\}^2. \end{aligned}$$

Or un nombre premier de la forme $16n+1$ n'est décomposable que d'une seule manière en un carré augmenté du double d'un autre. En désignant donc cette décomposition par c^2+2d^2, on obtient

$$[0R]+[4N]-[0N]-[4R] = c,$$
$$[3R]+[7N]-[3N]-[7R] = d$$

où toutefois il faut choisir les signes de c et de d d'une manière convenable. Or on a

$$\begin{aligned} [0N] &= [01]+[03]+[05]+[07] \\ &= [77]+[55]+[33]+[11]. \end{aligned}$$

Le nombre [11] indique combien il y a de nombres de la classe $\mathfrak{B}$ qui sont suivis immédiatement d'un nombre de la même classe $\mathfrak{B}$.

Or il est évident que si β est un nombre de la classe $\mathfrak{B}$ suivi d'un nombre $\beta+1$ appartenant à la classe $\mathfrak{B}$, le nombre $q-\beta-1$ appartiendra à la classe $\mathfrak{B}$ et sera suivi du nombre $q-\beta$ appartenant à la même classe. Il s'ensuit qu'on peut associer deux à deux les nombres de la classe $\mathfrak{B}$ qui sont suivis immédiatement d'un nombre de la même classe. C'est

*) *Éléments d'Euclide,* II, 5.

ainsi que β et $q-1-\beta$ seront appelés des nombres associés toutes les fois que $\beta+1$ appartient à la classe $\mathfrak{B}$. Le nombre [11] est par conséquent pair à moins qu'il n'existe un nombre associé à lui-même. Or cette dernière circonstance ne peut se présenter: car elle exige que $\frac{q-1}{2}$ et par conséquent 2 appartienne à la classe $\mathfrak{B}$, ce qui est impossible, le nombre 2 étant résidu quadratique de tout module premier de la forme $16n+1$. On prouvera de la même manière que les nombres [33], [55] et [77] sont pairs; le nombre $[0N]$ le sera par conséquent aussi, et comme on a

$$[4R] = [40]+[42]+[44]+[46] = 2[44]+2[42],$$

on en tire

$$c \equiv [0R]+[4N]+[0N]+[4R] \equiv 4n-1 \equiv -1 \pmod{4},$$

ce qui détermine le signe de c. Les quatre équations

$$\begin{aligned}
[0R]+[4N]-[0N]-[4R] &= c,\\
[3R]+[7N]-[3N]-[7R] &= d,\\
[0R]+[4N]+[0N]+[4R] &= 4n-1,\\
[3R]+[7N]+[3N]+[7R] &= 4n
\end{aligned}$$

nous donnent

$$\begin{aligned}
[0R]+[4N] &= 2n+\tfrac{1}{2}(c-1),\\
[0N]+[4R] &= 2n-\tfrac{1}{2}(c+1),\\
[3R]+[7N] &= 2n+\tfrac{1}{2}d,\\
[3N]+[7R] &= 2n-\tfrac{1}{2}d.
\end{aligned}$$

Cela étant ainsi, les huit équations

$$\begin{aligned}
&[0R]+[4R] = h+k = 2n-\tfrac{1}{4}(a+3),\\
&[0N]+[4N] = i+l = 2n+\tfrac{1}{4}(a-1),\\
&[0R]+[4N] = 2n+\tfrac{1}{2}(c-1),\\
&[4R]+[4N] = 2n,\\
&[3R]+[7R] = 2n+\tfrac{1}{4}b,\\
&[3N]+[7N] = 2n-\tfrac{1}{4}b,\\
&[3R]+[3N] = 2n,\\
&[3N]+[7R] = 2n-\tfrac{1}{2}d,
\end{aligned}$$

nous donnent

$$\begin{aligned}
[0R] &= n+\tfrac{1}{8}(-a+2c-5),\\
[0N] &= n+\tfrac{1}{8}(\ \ a-2c-3),\\
[4R] &= n+\tfrac{1}{8}(-a-2c-1),\\
[4N] &= n+\tfrac{1}{8}(\ \ a+2c+1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[3R] &= n+\tfrac{1}{8}(\ \ b+2d),\\
[7R] &= n+\tfrac{1}{8}(\ \ b-2d),\\
[3N] &= n+\tfrac{1}{8}(-b-2d),\\
[7N] &= n+\tfrac{1}{8}(-b+2d).
\end{aligned}$$

Les quantités $[1R]$, $[1N]$, $[5R]$, $[5N]$ se déterminent par les équations

$$\begin{aligned}
[1R] &= [7N] = n+\tfrac{1}{8}(-b+2d),\\
[1N] &= [7R] = n+\tfrac{1}{8}(\ \ b-2d),\\
[5R] &= [3N] = n+\tfrac{1}{8}(-b-2d),\\
[5N] &= [3R] = n+\tfrac{1}{8}(\ \ b+2d).
\end{aligned}$$

Enfin les quatre indéterminées $[2R]$, $[2N]$, $[6R]$, $[6N]$ sont données par les équations

$$\begin{aligned}
[2R] &= [6R] = k = n+\tfrac{1}{8}(\ \ a-1),\\
[2N] &= [6N] = m = n+\tfrac{1}{8}(-a+1).
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer le signe de d.

Considérons l'expression

$$\sum_{z=1}^{z=q-1} (z^2+1)^{\frac{q-1}{8}}.$$

On sait qu'on a

$$\sum_{z=1}^{z=q-1} z^\mu \equiv 0 \pmod{q}$$

toutes les fois que μ n'est pas divisible par $q-1$. Dans le cas où μ est divisible par $q-1$, on a

$$\sum_{z=1}^{z=q-1} z^\mu \equiv -1 \pmod{q}.$$

On obtient par conséquent

$$\sum_{z=1}^{z=q-1} (z^2+1)^{\frac{q-1}{8}} \equiv -1 \pmod{q}.$$

Or parmi les nombres z^2+1 il y en aura $2[0R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{A}$, $2[1R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{B}$, $2[2R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{C}$, $2[3R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{D}$, $2[4R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{E}$, $2[5R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{F}$, $2[6R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{G}$, $2[7R]$ nombres appartenant à la classe $\mathfrak{H}$ et enfin deux nombres divisibles par q. On peut écrire par conséquent

$$\begin{aligned}
&2\{[0R]+\omega[1R]+\omega^2[2R]+\omega^3[3R]\}\\
&-2\{[4R]+\omega[5R]+\omega^2[6R]+\omega^3[7R]\} \equiv -1 \pmod{q}.
\end{aligned}$$

Or on a, en vertu des relations que nous avons obtenues,

$$[2R] = [6R],$$
$$[0R]-[4R] = \frac{c-1}{2},$$
$$[1R]-[5R] = [3R]-[7R] = \tfrac{1}{2}d$$

et par conséquent

$$c+d(\omega+\omega^3) \equiv 0 \pmod{q},$$

ce qui détermine le signe de d.

10.

Nous pouvons obtenir maintenant facilement la valeur de l'expression $(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$, le module q étant un nombre premier de la forme $16n+1$. La congruence

$$x^{\frac{q-1}{8}} \equiv \omega^5 \pmod{q}$$

admettra pour racines tous les nombres ζ, ζ', ζ'', ... de la classe $\mathfrak{F}$. Le nombre de ces nombres étant $\frac{q-1}{8}$, on aura identiquement

$$(x-\zeta)(x-\zeta')(x-\zeta'')(x-\zeta''')\ldots \equiv x^{\frac{q-1}{8}} - \omega^5 \pmod{q}$$

et en faisant $x = -1$:

$$(1+\zeta)(1+\zeta')(1+\zeta'')(1+\zeta''')\ldots \equiv 1-\omega^5 \equiv 1+\omega \pmod{q}$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{q-1}{2}$:

$$(-1)^{[5N]} \equiv (1+\omega)^{\frac{q-1}{2}},$$

et en substituant la valeur de $[5N]$,

$$(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{n+\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}d} \pmod{q}.$$

11.

Passons maintenant aux modules premiers q de la forme $16n+9$. En se souvenant que $q-1$ appartient pour de tels modules à la classe $\mathfrak{C}$, on obtient par la considération des congruences:

$$1+\alpha+\beta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\beta+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\gamma\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\gamma+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\delta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\delta+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\varepsilon\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\zeta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\alpha+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\alpha\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\gamma\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\gamma+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\delta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\delta+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\varepsilon\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\zeta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\beta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\beta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\gamma+\delta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\delta+\gamma\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\gamma+\varepsilon\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\gamma\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\gamma+\zeta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\gamma\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\gamma+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\gamma\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\gamma+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\gamma\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\delta+\varepsilon\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\delta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\delta+\zeta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\delta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\delta+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\delta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\delta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\delta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\varepsilon+\zeta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\zeta+\varepsilon\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\varepsilon+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\varepsilon\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\varepsilon+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\varepsilon\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\zeta+\eta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\eta+\zeta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\zeta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\zeta\equiv 0 \pmod{q},$$
$$1+\eta+\theta\equiv 0 \quad \text{et} \quad 1+\theta+\eta\equiv 0 \pmod{q},$$

les relations suivantes:

$[00]=[44]$, $[01]=[54]$, $[02]=[64]$, $[03]=[74]$, $[05]=[14]$, $[06]=[24$
$[07]=[34]$, $[10]=[45]$, $[11]=[55]$, $[12]=[65]$, $[13]=[75]$, $[16]=[25$
$[17]=[35]$, $[20]=[46]$, $[21]=[52]$, $[22]=[66]$, $[23]=[76]$, $[27]=[36$
$[30]=[47]$, $[31]=[57]$, $[32]=[67]$, $[33]=[77]$, $[41]=[50]$, $[42]=[60$
$[43]=[70]$, $[52]=[61]$, $[53]=[71]$, $[63]=[72]$.

En multipliant la congruence

$$1+\alpha+\varepsilon \equiv 0 \pmod{q}$$

par le nombre ε' de la classe $\mathfrak{E}$ qui donne $\varepsilon\varepsilon' \equiv 1 \pmod{q}$ et en désignant par ε'' le moindre résidu positif de $\alpha\varepsilon'$, on obtient

$$1+\varepsilon'+\varepsilon'' \equiv 0 \pmod{q}$$

d'où l'on tire

$$[00] = [40].$$

Des considérations analogues nous donnent les relations suivantes

[01] = [37], [02] = [26], [03] = [15], [05] = [73], [06] = [62], [07] = [51],
[10] = [33] = [41], [11] = [30] = [43], [12] = [27] = [53], [13] = [16] = [63],
[17] = [23] = [52], [20] = [22] = [02], [21] = [31] = [32].

Nos soixante-quatre indéterminées se réduisent ainsi à quinze comme le montre le Tableau suivant:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
IX	X	XI	XII	VI	IV	XII	XIII
XIV	XV	XIV	XIII	VII	XII	III	XI
X	XV	XV	IX	VIII	XIII	XI	II
I	IX	XIV	X	I	IX	XIV	X
IX	VIII	XIII	XI	II	X	XV	XV
XIV	XIII	VII	XII	III	XI	XIV	XV
X	XI	XII	VI	IV	XII	XIII	IX

Les nombres de *Gauss* s'expriment à l'aide de ceux que nous venons d'introduire, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} h &= 3\mathrm{I} + \mathrm{V}, \\ i &= \mathrm{II} + \mathrm{VI} + 2\mathrm{IX}, \\ k &= \mathrm{III} + \mathrm{VII} + 2\mathrm{XIV}, \\ l &= \mathrm{IV} + \mathrm{VIII} + 2\mathrm{X}, \\ m &= \mathrm{XI} + \mathrm{XII} + \mathrm{XIII} + \mathrm{XV}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant introduire, comme au § 9, les nombres

$$[0R],\quad [1R],\quad [2R],\quad [3R],\quad [4R],\quad [5R],\quad [6R],\quad [7R],$$
$$[0N],\quad [1N],\quad [2N],\quad [3N],\quad [4N],\quad [5N],\quad [6N],\quad [7N].$$

On obtient sans difficulté

$$\begin{aligned}
&[2R] = [6R] = \mathrm{III}+\mathrm{VII}+2\mathrm{XIV} = k,\\
&[2N] = [6N] = \mathrm{XI}+\mathrm{XII}+\mathrm{XIII}+\mathrm{XV} = m,\\
&[1R] = [7N] = \mathrm{VI}+\mathrm{IX}+\mathrm{XI}+\mathrm{XII},\\
&[3R] = [5N] = \mathrm{VIII}+\mathrm{X}+\mathrm{XI}+\mathrm{XV},\\
&[5R] = [3N] = \mathrm{II}+\mathrm{IX}+\mathrm{XIII}+\mathrm{XV},\\
&[7R] = [1N] = \mathrm{IV}+\mathrm{X}+\mathrm{XII}+\mathrm{XIII},\\
&[0R] = \mathrm{I}+\mathrm{III}+\mathrm{V}+\mathrm{VII},\\
&[4R] = 2\mathrm{I}+2\mathrm{XIV},\\
&[0N] = \mathrm{II}+\mathrm{IV}+\mathrm{VI}+\mathrm{VIII},\\
&[4N] = 2\mathrm{IX}+2\mathrm{X},\\
&[0R]+[4R] = h+k,\\
&[0N]+[4N] = i+l,\\
&[3R]+[7R] = l+m,\\
&[3N]+[7N] = i+m.
\end{aligned}$$

En introduisant aussi les nombres

$$[R0],\quad [R1],\quad [R2],\quad [R3],\quad [R4],\quad [R5],\quad [R6],\quad [R7],$$
$$[N0],\quad [N1],\quad [N2],\quad [N3],\quad [N4],\quad [N5],\quad [N6],\quad [N7],$$

on obtient immédiatement les relations suivantes

$$[R0] = [4R],\quad [R1] = [5R],\quad [R2] = [6R],\quad [R3] = [7R],\quad [R4] = [0R],$$
$$[R5] = [1R],\quad [R6] = [2R],\quad [R7] = [3R],\quad [N0] = [4N],\quad [N1] = [5N],$$
$$[N2] = [6N],\quad [N3] = [7N],\quad [N4] = [0N],\quad [N5] = [1N],\quad [N6] = [2N],$$
$$[N7] = [3N].$$

Quant aux nombres

$$[RR],\quad [RN],\quad [NR],\quad [NN],$$

leurs valeurs seront

$$[RR] = \frac{q-5}{4},\quad [NN] = \frac{q-1}{4},\quad [RN] = [NR] = \frac{q-1}{4}.$$

Cela étant ainsi, la considération du nombre des solutions de la congruence

$$1+\alpha+N+R \equiv 0 \pmod{q}$$

nous donne la relation

$$\begin{aligned}
&[0R][4N]+[1R][5N]+[2R][6N]+[3R][7N] \\
&+[4R][0N]+[5R][1N]+[6R][2N]+[7R][3N] \\
&=[NR]\{[0R]+[0N]\} = 8n^2+8n+2.
\end{aligned}$$

De même on obtient, par la considération du nombre des solutions de la congruence

$$\begin{aligned}
&1+\varepsilon+R+R' \equiv 0 \pmod{q}: \\
&[0R][0R]+[1R][1R]+[2R][2R]+[3R][3R] \\
&+[4R][4R]+[5R][5R]+[6R][6R]+[7R][7R] \\
&= 6n+3+[RR][4R]+[NN][4N].
\end{aligned}$$

Enfin la congruence

$$1+\varepsilon+N+N' \equiv 0 \pmod{q}$$

nous conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}
&[0N][0N]+[1N][1N]+[2N][2N]+[3N][3N] \\
&+[4N][4N]+[5N][5N]+[6N][6N]+[7N][7N] \\
&= 8n+4+[RR][4N]+[NN][4R].
\end{aligned}$$

En ajoutant cette égalité à la précédente et au double de celle que nous avons obtenue auparavant, on obtient

$$\begin{aligned}
&[0R][0R]+[1R][1R]+[2R][2R]+[3R][3R] \\
&+[4R][4R]+[5R][5R]+[6R][6R]+[7R][7R] \\
&+[0N][0N]+[1N][1N]+[2N][2N]+[3N][3N] \\
&+[4N][4N]+[5N][5N]+[6N][6N]+[7N][7N] \\
&+2[0R][4N]+2[0N][4R]+2[2R][6N]+2[2N][6R] \\
&+2[3R][7N]+2[3N][7R]+2[1R][5N]+2[1N][5R] \\
&= 32n^2+36n+11.
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
[0R]+[4N]+[0N]+[4R] &= 4n+1, \\
[2R]+[6N]+[2N]+[6R] &= 4n+2, \\
[3R]+[7N]+[3N]+[7R] &= 4n+2, \\
[1R]+[5N]+[1N]+[5R] &= 4n+2
\end{aligned}$$

d'où, en élevant ces quatre relations au carré, en les ajoutant et en retranchant le résultat ainsi obtenu du double de la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}&\{[0R]+[4N]-[0N]-[4R]\}^2\\&+\{[2R]+[6N]-[2N]-[6R]\}^2\\&+\{[3R]+[7N]-[3N]-[7R]\}^2\\&+\{[1R]+[5N]-[1N]-[5R]\}^2\\&=16n+9=q,\end{aligned}$$

et en remarquant que le second carré est nul et que le quatrième est égal au troisième:

$$q = \{[0R]+[4N]-[0N]-[4R]\}^2 \\ +2\{[3R]+[7N]-[3N]-[7R]\}^2.$$

Or un nombre premier de la forme $16n+9$ n'est décomposable que d'une seule manière en un carré augmenté du double d'un autre.

En posant par conséquent $q=c^2+2d^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}[0R]+[4N]-[0N]-[4R] &= c,\\ [3R]+[7N]-[3N]-[7R] &= d,\end{aligned}$$

les signes de c et de d devant être choisis convenablement. On obtient d'ailleurs facilement

$$c\equiv 4n+1\equiv 1 \pmod{q}.$$

En combinant les deux relations précédentes avec les suivantes

$$\begin{aligned}[0R]+[4N]+[0N]+[4R] &= 4n+1,\\ [3R]+[7N]+[3N]+[7R] &= 4n+2\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}[0R]+[4N] &= 2n+\frac{c+1}{2},\\ [0N]+[4R] &= 2n-\frac{c-1}{2},\\ [3R]+[7N] &= 2n+\tfrac{1}{2}d+1,\\ [3N]+[7R] &= 2n-\tfrac{1}{2}d+1.\end{aligned}$$

Cela étant ainsi, les huit relations

$$\begin{aligned}[0R]+[4R] &= 2n-\frac{a-1}{4},\\ [0N]+[4N] &= 2n+\frac{a+3}{4},\\ [0R]+[4N] &= 2n+\frac{c+1}{2},\\ [4R]+[4N] &= 2n,\\ [3R]+[7R] &= 2n+\tfrac{1}{4}b+1,\\ [3N]+[7N] &= 2n-\tfrac{1}{4}b+1,\\ [3R]+[3N] &= 2n+1,\\ [3N]+[7R] &= 2n-\tfrac{1}{2}d+1\end{aligned}$$

nous donnent

$$\begin{aligned}
[0R] &= n+\tfrac{1}{8}(-a+2c+3),\\
[0N] &= n+\tfrac{1}{8}(a-2c+5),\\
[4R] &= n+\tfrac{1}{8}(-a-2c-1),\\
[4N] &= n+\tfrac{1}{8}(a+2c+1),\\
[3R] &= [5N] = n+\tfrac{1}{8}(b+2d+4),\\
[7R] &= [1N] = n+\tfrac{1}{8}(b-2d+4),\\
[3N] &= [5R] = n+\tfrac{1}{8}(-b-2d+4),\\
[7N] &= [1R] = n+\tfrac{1}{8}(-b+2d+4).
\end{aligned}$$

Enfin les quatre dernières indéterminées sont données par les équations

$$\begin{aligned}
[2R] = [6R] &= n+\tfrac{1}{8}(\ \ a+3),\\
[2N] = [6N] &= n+\tfrac{1}{8}(-a+5).
\end{aligned}$$

En procédant comme au § 9 on obtient, pour la détermination du signe de d, la congruence

$$c+d(\omega+\omega^3) \equiv 0 \pmod{q}.$$

12.

Il est facile maintenant de déterminer la valeur de l'expression $(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$, le module premier q étant de la forme $16n+9$. La congruence

$$x^{\frac{q-1}{8}} - \omega \equiv 0 \pmod{q}$$

admet pour racines tous les nombres β, β', β'', ... de la classe $\mathfrak{B}$. Or le nombre de ces nombres étant $\frac{q-1}{8}$, on aura identiquement

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\cdots \equiv x^{\frac{q-1}{8}} - \omega \pmod{q},$$

et en faisant $x = -1$:

$$(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\cdots \equiv 1+\omega \pmod{q}$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{q-1}{2}$

$$(-1)^{[1N]} \equiv (1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$$

et en remplaçant $[1N]$ par sa valeur:

$$(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-9}{16}+\frac{1}{8}(b-2d+4)} \pmod{q}.$$

13.

Reprenons maintenant la congruence du § 2

$$(-1)^{\frac{q-1}{8}}(1+f)^{\frac{q-1}{4}} \equiv (1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(-1)^{\frac{q-1}{8}}(1+f)^{\frac{q-1}{4}}(1+\omega)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Quand $q=16n+1$, cette congruence devient

$$(-f)^{\frac{1}{4}d} \equiv 1 \pmod{q}$$

d'où

$$d \equiv 0 \pmod{8}.$$

Dans le cas où $q=16n+9$ on obtient

$$(-f)^{-\frac{1}{4}d} \equiv 1 \pmod{q}$$

d'où, comme dans le cas précédent,

$$d \equiv 0 \pmod{8}.$$

En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu aux paragraphes 1 et 2, on parvient au théorème suivant que nous nous étions proposé de démontrer dans le présent travail:

Pour que l'équation

$$t^2-2q^2u^2=-1,$$

où q désigne un nombre premier de la forme $8n+1$, soit possible, il faut que dans la décomposition $q=c^2+2d^2$ le nombre d soit divisible par 8. La condition est suffisante quand q est de la forme $16n+9$. Elle ne l'est pas quand q est de la forme $16n+1$. La vérité de cette dernière assertion est prouvée par un des exemples qui suivent.

Exemples.

Exemple I. Soit $q=137=16.8+9=3^2+2.8^2$. L'équation

$$t^2-2.137^2.u^2=-1$$

est donc possible. En effet, on a

$$1\,607\,521^2-2.137^2.8\,297^2=-1.$$

Exemple II. Soit $q=353=16.22+1=15^2+2.8^2$. L'équation

$$t^2-2.353^2u^2=-1$$

est impossible. En effet, la période de la forme principale réduite se com-

pose dans ce cas des termes (1, 499, −217), (−217, 369, 521), (521, 152, −434), (−434, 282, 391), (391, 109, −607), (−607, 498, 2), (2, 498, −607), (−607, 109, 391), (391, 282, −434), (−434, 152, 521), (521, 369, −217), (−217, 499, 1). La forme (−1, 499, 217) n'y figure point.

Exemple III. Soit $q=593=16.37+1=9^2+2.16^2$. L'équation

$$t^2-2.593^2u^2 = -1$$

est possible. En effet, on a

$$72\,722\,761\,475\,561^2-2.593^2.86\,716\,286\,317^2 = -1.$$

Gra-Thumiac, le 15 mai 1885.

Untersuchungen über die Existenz eines Functionaltheorems.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Die Identität der beiden Formen des Additionstheorems der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen, wonach die Function für die Summe zweier Argumente sich ebenso wie ihre Ableitung einerseits *rational* durch die Werthe der Function und deren Ableitung für die einzelnen Argumente ausdrücken lässt, andererseits sich nur durch die Functionen selbst der gesonderten Argumente *algebraisch* darstellt, rührt daher, dass diese Functionen Integrale algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung sind, in denen die unabhängige Variable explicite nicht enthalten ist. In meiner Arbeit „Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des *Abel*schen" (in diesem Journal Bd. 100 und 101) habe ich, da vermuthet worden, dass die Functionen mit nicht additiver Periode möglicherweise ein Functionaltheorem in dem Sinne besitzen, dass die Function einer algebraischen Verbindung zweier Argumente sich algebraisch durch die Functionen der einzelnen Argumente ausdrücken lasse*), nachgewiesen, dass es überhaupt keine Function einer oder mehrerer Variabeln giebt, welche ein Functionaltheorem besitzt, das in dem angegebenen Sinne eine Verallgemeinerung des *Abel*schen Theorems für Integrale algebraischer Functionen oder des Additionstheorems der *Abel*schen Functionen ist; damit ist aber die neuerdings wieder aufgeworfene Frage noch nicht erledigt, ob nicht Functionen mit algebraischer nicht additiver Periode oder nicht periodische Functionen existiren, welche ein Functionaltheorem von der Form besitzen, dass, um bei Functionen *einer* Variabeln zu bleiben, die Function einer algebraischen Verbindung zweier Argumente

---

*) weil gefunden wurde, dass die Existenz eines solchen Functionaltheorems nothwendig die Eigenschaft der Function nach sich zieht, eine algebraische Periode zu besitzen.

sich algebraisch durch die Function und deren Ableitungen bis zu einer endlichen Ordnung hin für die einzelnen Argumente ausdrücken lasse, und ich will nun in der vorliegenden Arbeit meine obengenannten Untersuchungen nach dieser Richtung hin vervollständigen.

Besteht für eine transcendente Function $f(u)$ die Beziehung

$$(1.)\quad f[\varphi(u,v)] = F\{u,\, f(u),\, f'(u),\, \dots f^{(m-1)}(u),\, v,\, f(v),\, f'(v),\, \dots f^{(m-1)}(v)\},$$

in welcher φ und F algebraische Functionen bedeuten, so darf zunächst angenommen werden, dass nicht schon zwischen u, $f(u)$, $f'(u)$, $\dots f^{(m-1)}(u)$ eine algebraische Beziehung bestehe, d. h. dass $f(u)$ nicht das Integral einer algebraischen Differentialgleichung $(m-1)$ter Ordnung sei, indem sonst mit Hülfe dieser Gleichung sowie der analogen für das Argument v die Gleichung (1.) in eine ebenso gestaltete algebraische Beziehung übergeführt werden könnte, welche nur niedrigere Ableitungen der Function f als die $(m-1)$te enthielte, und dann diese Gleichung der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt würde.

Differentiirt man nun die Gleichung (1.) nach u und v, so dass man

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f[\varphi(u,v)]}{\partial\varphi(u,v)}\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial f(u)}f'(u)+\dfrac{\partial F}{\partial f'(u)}f''(u)+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial f^{(m-1)}(u)}f^{(m)}(u), \\ \dfrac{\partial f[\varphi(u,v)]}{\partial\varphi(u,v)}\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} = \dfrac{\partial F}{\partial v}+\dfrac{\partial F}{\partial f(v)}f'(v)+\dfrac{\partial F}{\partial f'(v)}f''(v)+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial f^{(m-1)}(v)}f^{(m)}(v) \end{cases}$$

erhält, so ergiebt sich durch Elimination von $\dfrac{\partial f[\varphi(u,v)]}{\partial\varphi(u,v)}$ zwischen den beiden Gleichungen (2.) eine algebraische Beziehung

$$(3.)\quad \Omega(u,\, f(u),\, f'(u),\, \dots f^{(m)}(u),\, v,\, f(v),\, f'(v),\, \dots f^{(m)}(v)) = 0,$$

die, wenn wir v irgend einen bestimmten Werth beilegen, $f(u)$ als Integral einer algebraischen Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(4.)\quad \omega(u,\, f(u),\, f'(u),\, \dots f^{(m)}(u)) = 0$$

definirt. Wir finden somit,

dass, wenn $f(u)$ ein Functionaltheorem von der Form (1.) besitzt, dieselbe das Integral einer algebraischen Differentialgleichung $m$ter Ordnung sein muss, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet.

dass somit die Gleichung (1.) *oder* (5.) *bestehen bleibt, wenn man für* $f(u)$ *oder für* $f(v)$ *oder für beide beliebige andere particuläre Integrale der Differentialgleichung* (4.) *für die resp. Argumente* u *und* v *setzt, wenn man nur für* $f(W)$ *ein passendes Integral der Differentialgleichung* (7.) *substituirt.*

Setzt man nun in (5.) statt $f(v)$ das mit m willkürlichen Constanten behaftete allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\omega(v,\ f(v),\ f'(v),\ \dots\ f^{(m)}(v)) = 0,$$

oder, was dasselbe ist, fixiren wir einen numerischen Werth von v, nämlich v_0, und setzen als dazu gehörige Werthe von $f(v)$, $f'(v)$, ... $f^{(m-1)}(v)$ die willkürlichen Constanten c_0, c_1, ... c_{m-1} fest, so erhält man

$$(13.)\qquad y = F\{u,\ f(u),\ f'(u),\ \dots\ f^{(m-1)}(u),\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}\},$$

worin y, wie oben gezeigt worden, ein Integral der Differentialgleichung (7.) und zwar wegen der m willkürlichen Constanten das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist, und substituirt man endlich $W = \varphi(u, v_0) = x$, so ergiebt sich, wenn u als algebraische Function von x in (13.) eingesetzt wird,

$$(14.)\qquad y = \chi(x,\ f(u),\ f'(u),\ \dots\ f^{(m-1)}(u),\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1})$$

als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$(15.)\qquad \omega(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(m)}) = 0 \quad \text{oder} \quad y^{(m)} = \Omega(x,\ y,\ y',\ \dots\ y^{(m-1)}).$$

Giebt man nun den m willkürlichen Constanten einen bestimmten Werthecomplex, dem ein particuläres Integral

$$(16.)\qquad y_1 = \chi(x,\ f(u),\ f'(u),\ \dots\ f^{(m-1)}(u),\ c'_0,\ c'_1,\ \dots\ c'_{m-1})$$

entspricht, differentiirt diese Gleichung $(m-1)$-mal nach einander nach x, worin u durch $\varphi(u, v_0) = x$ als algebraische Function von x definirt ist, und drückt die höheren Ableitungen von $f(u)$ als die $(m-1)$te vermöge der Gleichung (4.) algebraisch durch die niederen aus, so erhält man m Gleichungen von der Form

$$(17.)\qquad \begin{cases} y'_1 = \chi_1(x,\ f(u),\ f'(u),\ \dots\ f^{(m-1)}(u),\ c'_0,\ c'_1,\ \dots\ c'_{m-1}),\ \dots \\ y_1^{(m-1)} = \chi_{m-1}(x,\ f(u),\ f'(u),\ \dots\ f^{(m-1)}(u),\ c'_0,\ c'_1,\ \dots\ c'_{m-1}), \end{cases}$$

in welchen χ_1, ... χ_m algebraische Functionen bedeuten, und die Elimination von $f(u)$, $f'(u)$, ... $f^{(m-1)}(u)$ zwischen den $m+1$ Gleichungen (14.), (16.), (17.) liefert

$$(18.)\qquad y = F(x,\ y_1,\ y'_1,\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1})$$

als algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale, *einem* particulären Integrale und dessen Ableitungen.

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Jede Function einer Variabeln, die ein Functionaltheorem von der Form (1.) besitzt, in welche die Ableitungen bis zur $(m-1)$ten Ordnung eintreten, ist das Integral einer algebraischen irreductibeln Differentialgleichung $m$ter Ordnung, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales, dessen Ableitungen, der unabhängigen Variabeln und m willkürlicher Constanten ist,

und es bleibt uns somit die Natur aller derjenigen Differentialgleichungen (15.) zu untersuchen übrig, welche die eben ausgesprochene, durch die Gleichung (18.) dargestellte Eigenschaft besitzen.

Setzt man zunächst den Werth von y aus (18.) in die Differentialgleichung (15.) ein, indem man die Ordnung der Differentialquotienten von y_1 vermöge (15.) selbst auf die $(m-1)$te und niedrigere reducirt, so erhält man eine algebraische Differentialgleichung in y_1 von der $(m-1)$ten Ordnung, und da (15.) eine irreductible Differentialgleichung sein sollte, so muss diese so erhaltene Gleichung $(m-1)$ter Ordnung eine identische sein; ist dies aber der Fall, so wird sie auch erfüllt, wenn man für y_1 irgend ein anderes particuläres Integral y_2 der Differentialgleichung (15.) setzt, oder was dasselbe ist, es wird der Ausdruck

$$(19.) \qquad Y = F(x,\ y_2,\ y_2',\ \dots\ y_2^{(m-1)},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1})$$

ebenfalls das allgemeine Integral der Differentialgleichung (15.) darstellen. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn in einer algebraischen Differentialgleichung $m$ter Ordnung das allgemeine Integral eine algebraische Function eines der particulären Integrale und dessen Ableitungen, der unabhängigen Variabeln und m willkürlicher Constanten ist, so stellt dieser Ausdruck auch noch das allgemeine Integral dar, wenn das particuläre Integral durch ein beliebiges anderes ersetzt wird.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dass

$$(20.) \qquad \begin{cases} F(x,\ y_2,\ y_2',\ \dots\ y_2^{(m-1)},\ \varkappa_0,\ \varkappa_1,\ \dots\ \varkappa_{m-1}) \\ = F(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}), \end{cases}$$

worin $\varkappa_0,\ \varkappa_1,\ \dots\ \varkappa_{m-1}$ bestimmte Functionen von $c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}$ sind, oder, weil nach (18.)

$$(21.)\qquad y_2 = F(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0',\ c_1',\ \dots\ c_{m-1}')$$

ist, worin $c_0', c_1', \dots c_{m-1}'$ particuläre Werthe der Constanten bedeuten, vermöge der Differentialgleichung (15.)

$$(22.)\qquad \begin{cases} F\Big\{x,\ F(x,\ y_1,\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0',\ \dots\ c_{m-1}'), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_1^{(m-1)}} \Omega(x,\ y_1,\ \dots\ y_1^{(m-1)}),\ \dots \\ \dfrac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-1}} + \cdots,\ \varkappa_0,\ \varkappa_1,\ \dots\ \varkappa_{m-1}\Big\} = F(x,\ y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}), \end{cases}$$

welche Gleichung aus den oben angegebenen Gründen wiederum eine in allen in ihr vorkommenden Grössen (die $\varkappa$ von c und c' abhängig betrachtet) identische sein muss, wobei zu beachten, dass auch das particuläre System der c' völlig willkürlich ist.

Zum Zwecke der Untersuchung eines Functionaltheorems der angegebenen Form wollen wir dem für eindeutige doppeltperiodische Functionen geltenden entsprechend annehmen, dass die unabhängige Variable x aus der Gleichung (18.) herausfällt, und dieselbe somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (15.) nur als algebraische Function eines particulären Integrales und dessen Ableitungen liefert, in welcher die unabhängige Variable der Differentialgleichung nicht explicite vorkommt *).

Wenn aber (18.) die Form annimmt

$$(23.)\qquad y = F(y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}),$$

also (22.) in

$$(24.)\qquad \begin{cases} F\Big\{F(y_1,\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0',\ \dots\ c_{m-1}'), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_1^{(m-2)}} y_1^{(m-1)} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1^{(m-1)}} \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}), \dots \varkappa_0, \varkappa_1, \dots \varkappa_{m-1}\Big\} \\ = F(y_1,\ y_1',\ \dots\ y_1^{(m-1)},\ c_0,\ \dots\ c_{m-1}) \end{cases}$$

übergeht, welche Gleichung, wie oben hervorgehoben, eine identische sein muss, so wird, weil die rechte Seite von x unabhängig ist, es auch die

*) Man sieht übrigens auch leicht ein, wie ich es in meiner oben angeführten Arbeit gezeigt habe, dass man die etwa existirenden Fälle, in denen die in (18.) gegebene Form der Function die unabhängige Variable explicite enthält, durch Substitutionen, welche in der abhängigen und unabhängigen Variablen algebraisch zusammengesetzt sind, aus dem oben behandelten Falle ableiten kann.

linke sein müssen, oder es wird diese für ein bestimmtes Werthesystem von $y_1, y'_1, \dots y_1^{(m-1)}, c_0, \dots c_{m-1}$ einen bestimmten von x unabhängigen Werth annehmen müssen; daraus folgt aber, wie durch eine leichte Ueberlegung zu schliessen *), dass im Allgemeinen der Ausdruck $\Omega(x, y_1, y'_1, \dots y_1^{(m-1)})$

---

*) Ist $m = 1$, so geht die Gleichung (18.) in $y = F(y_1, c_0)$ über, während (22.) die Form annimmt

$$F\{F(y_1, c'_0), \varkappa_0\} = F(y_1, c_0),$$

so dass hieraus noch nichts über das Vorkommen von x in der Differentialgleichung erster Ordnung $y' = \Omega(x, y)$ geschlossen werden kann.

Ist $m = 2$, so wird (18.) in $y = F(y_1, y'_1, c_0, c_1)$ und (22.) in

$$F\left\{F(y_1, y'_1, c'_0, c'_1), \frac{\partial F}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial y'_1} \Omega(x, y_1, y'_1), \varkappa_0, \varkappa_1\right\} = F(y_1, y'_1, c_0, c_1)$$

übergehen, und hieraus folgt sofort, dass, weil sich der Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial y'_1} \Omega(x, y_1, y'_1)$$

als algebraische Function von y_1, y'_1 ergeben würde, $\Omega(x, y_1, y'_1)$ die Variable x nicht explicite enthalten darf, da die Gleichung eine identische sein soll und $\frac{\partial F}{\partial y'_1}$ nicht identisch verschwinden soll, indem, wenn das Letztere der Fall wäre, das allgemeine Integral nur eine algebraische Function *eines* particulären Integrales und zweier willkürlicher Constanten wäre.

Ist $m = 3$, so wird nach Gleichung (18.) $y = F(y_1, y'_1, y''_1, c_0, c_1, c_2)$ sein, während die Gleichung (22.) die Form annimmt:

$$\begin{aligned} F\Big\{F(y_1, y'_1, y''_1, c'_0, c'_1, c'_2),\ & \frac{\partial F}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial y'_1} y''_1 + \frac{\partial F}{\partial y''_1} \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1), \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} y'^2_1 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y'_1} y'_1 y''_1 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y''_1} y'_1 \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1) \\ & + \frac{\partial F}{\partial y_1} y''_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2_1} y''^2_1 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y''_1} y''_1 \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1) \\ & + \frac{\partial F}{\partial y'_1} \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial y''^2_1} \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1)^2 \\ & + \frac{\partial F}{\partial y''_1}\Big(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y'_1} y''_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y''_1} \Omega(x, y_1, y'_1, y''_1)\Big), \varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2\Big\} \\ = F(y_1, y'_1, y''_1, c_0, c_1, c_2), & \end{aligned}$$

und diese Gleichung muss eine in $x, y_1, y'_1, y''_1, c'_0, c'_1, c'_2, \varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ identische sein, wenn man c_0, c_1, c_2 als Functionen von $c'_0, c'_1, c'_2, \varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ auffasst. Unterwirft man nun die willkürlichen sechs Grössen $c'_0, c'_1, c'_2, \varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2$ der Bedingung, dass $\frac{\partial F}{\partial y''_1} = 0$ wird, oder bestimmt man diese sechs Grössen so als Functionen von y_1, y'_1, y''_1, dass dieser Bedingung Genüge geschieht, so werden die drei Argumente der Function $F\{\}$ der

ebenfalls das x nicht explicite enthalten darf, und die Differentialgleichung (15.) somit die Form annehmen wird

$$(25.)\qquad y^{(m)} = \Omega(y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(m-1)}),$$

wenn nicht die Relation (18.) von den Ableitungen des particulären Integrales y_1 frei ist und also die Form hat

$$y = F(y_1,\ c_0,\ c_1,\ \dots\ c_{m-1}).$$

Nun ist aber unmittelbar zu sehen, dass, wenn $y_1 = f_1(x)$ irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung (25.) ist, nothwendig auch $y = f_1(x+c)$, worin c eine willkürliche Constante bedeutet, ein solches sein wird, da $\frac{d^ky}{dx^k} = f_1^{(k)}(x+c)$ und $\frac{d^ky_1}{dx^k} = f_1^{(k)}(x)$ ist, und es wird somit nach Gleichung (23.)

$$(26.)\qquad f_1(x+c) = F\{f_1(x),\ f_1'(x),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x),\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots\ \alpha_{m-1}\}$$

sein, worin $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots\ \alpha_{m-1}$ ein specielles Werthesystem der Integrationsconstanten bedeuten, von denen eine dem c der linken Seite entsprechend willkürlich bleiben muss; die Möglichkeit dieser Beziehung wäre nun zu untersuchen,

---

linken Seite der letzten Gleichung lauten:

$$F(y_1,\ y_1',\ y_1'',\ c_0',\ c_1',\ c_2'),\ \frac{\partial F}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_1'}y_1'',$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}y_1'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'}y_1'y_1'' + \frac{\partial F}{\partial y_1}y_1'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2}y_1''^2$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1''}y_1' + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1''}y_1''\right)\Omega(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'') + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1''^2}\Omega(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'')^2,$$

und da wieder nur das dritte Argument von der expliciten Variabeln x abhängen würde, so folgt, da die rechte Seite der betrachteten Gleichung von x unabhängig ist, dass auch x in $\Omega(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'')$ nicht vorkommt. Der Schluss würde dann nicht statthaft sein, wenn $\frac{\partial F}{\partial y_1''}$ identisch Null wäre; dann sieht man aber sogleich, dass wieder das erste und zweite Argument von x unabhängig sind, während das dritte vermöge des Postens $\frac{\partial F}{\partial y_1'}\Omega(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'')$ verlangt, dass Ω wieder x nicht explicite enthält; ist aber endlich auch $\frac{\partial F}{\partial y_1'}$ identisch Null, so lässt sich wieder über die Form von Ω nichts aussagen, und dieser Fall tritt also ein, wenn die Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale die Ableitungen des letzteren gar nicht enthält, also die Gestalt hat $y = F(y_1,\ c_0,\ c_1,\ c_2)$. Und genau so schliesst man weiter für algebraische irreductible Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Was die Natur der algebraischen Differentialgleichungen betrifft, deren allgemeines Integral algebraisch von nur *einem* particulären Integrale abhängt, so verweise ich auf eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

die dann zu gleicher Zeit für das particuläre Integral $f_1(x)$ ein Functionaltheorem in dem durch die Gleichung (1.) angegebenen Sinne darstellen würde. Da aber nur eine der Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ eine willkürliche Constante ist, während alle die anderen von dieser abhängen, so wird man (26.) auch so schreiben können:

$$(27.) \quad f_1(x+c) = F\{f_1(x), f_1'(x), \dots f_1^{(m-1)}(x), C\},$$

und setzt man $x=0$, so dass sich

$$f_1(c) = F\{f_1(0), f_1'(0), \dots f_1^{(m-1)}(0), C\}$$

ergiebt, so folgt, dass C eine algebraische Function von $f_1(c)$ ist; ebenso würde, wenn (27.) nach x differentiirt wird, vermöge der Differentialgleichung (25.)

$$(28.) \quad f_1'(x+c) = F_1\{f_1(x), f_1'(x), \dots f_1^{(m-1)}(x), C\},$$

also auch für $x=0$

$$f_1'(c) = F_1\{f_1(0), f_1'(0), \dots f_1^{m-1}(0), C\}$$

folgen, und somit C auch als algebraische Function von $f_1'(c)$ dargestellt werden können; schliesst man so weiter, so kann man also (27.) oder (26.) in die Form:

$$(29.) \quad f_1(x+c) = F\{f_1(x), f_1'(x), \dots f_1^{(m-1)}(x), f_1(c), f_1'(c), \dots f_1^{(m-1)}(c)\}$$

setzen, worin F wiederum eine algebraische Function und c eine willkürliche Constante bedeutet, für die y gesetzt (29.) in

$$(30.) \quad f_1(x+y) = F\{f_1(x), f_1'(x), \dots f_1^{(m-1)}(x), f_1(y), f_1'(y), \dots f_1^{(m-1)}(y)\}$$

übergeführt wird, und eine solche Functionalgleichung müsste für jedes particuläre Integral mit Beibehaltung derselben algebraischen Function F bestehen; wir erhalten somit den Satz:

Wenn eine Function überhaupt ein Functionaltheorem von der Form (1.) *besitzen soll, so muss die algebraische Function $\varphi(u,v)$ der beiden unabhängigen Variabeln u und v die Summe der beiden Argumente sein,*

oder auch mit Benutzung der früheren Sätze:

Wenn eine Function ein Functionaltheorem von der Form (1.) *besitzen soll, so muss dieselbe das Integral einer irreductibeln algebraischen Differentialgleichung $m$ter Ordnung sein, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines der particulären Integrale und dessen Ableitungen ist, und umgekehrt, ist das allgemeine Integral einer irreductibeln algebraischen Diffe-*

rentialgleichung eine algebraische Function e i n e s *particulären Integrales und dessen Ableitungen, so besitzt jedes der Integrale ein Functionaltheorem von der Form* (1.) *und zwar in der durch die Gleichung* (30.) *gegebenen Gestalt.*

Man könnte nun zur Feststellung dieser algebraischen Functionen die Möglichkeit der Existenz der Gleichung (23.) zu ermitteln suchen und würde so auf die Untersuchung der Möglichkeit algebraischer Beziehungen zwischen particulären Integralen und deren Ableitungen geführt werden, worauf ich bei anderer Gelegenheit nächstens zurückzukommen hoffe; es wird sich jedoch, um möglichst schnell zu dem negativen Resultate zu gelangen, das ich herleiten will, empfehlen, diese Frage auf die von mir in der oben bezeichneten Arbeit behandelte zurückzuführen. Setzt man nämlich in (18.) m Werthesysteme für die Constanten $c_0, c_1, \dots c_{m-1}$, denen die m particulären Integrale $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots y_{\alpha_m}$ entsprechen mögen, so wird die Elimination von $y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ aus der Gleichung (18.) und den Gleichungen

$$(31.)\quad \begin{cases} y_{\alpha_1} = F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, c_0^{\alpha_1}, c_1^{\alpha_1}, \dots c_{m-1}^{\alpha_1}), \quad \dots \\ y_{\alpha_m} = F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, c_0^{\alpha_m}, c_1^{\alpha_m}, \dots c_{m-1}^{\alpha_m}) \end{cases}$$

eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale y, den m particulären Integralen $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots y_{\alpha_m}$, der unabhängigen Variabeln und m willkürlichen Constanten liefern; treten nur die ersten k Ableitungen von y_1 in (18.) ein, so wird das allgemeine Integral offenbar nur von $k+1$ particulären Integralen algebraisch abhängen. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Jede Function e i n e r *Variabeln, die ein Functionaltheorem von der Form* (1.) *besitzt, in welches die Ableitungen bis zur* $(m-1)$*ten Ordnung eintreten, ist das Integral einer algebraischen irreductibeln Differentialgleichun mter Ordnung, deren allgemeines Integral eine algebraische Function von particulären Integralen, aer unabhängigen Variabeln und m willkürlichen Coı stanten ist, oder unter deren unendlich vielen Integralen höchstens m selb: ständige Transcendenten enthalten sind.*

Nun wurde aber in meiner oben erwähnten Arbeit über das Fr tionaltheorem nachgewiesen,

dass sich alle algebraischen irreductibeln Differentialgleichungen Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Functioı m particulären Integralen derselben ist, durch eine in der abhängiget

unabhängigen Variabeln algebraische Substitution aus linearen homogenen Differentialgleichungen ableiten lassen,
und es ist somit die in der vorliegenden Arbeit aufgeworfene Frage darauf zurückgeführt, zu untersuchen, welche homogenen linearen irreductibeln Differentialgleichungen die Eigenschaft haben, dass eines ihrer particulären Integrale ein in der Form (1.) ausgedrücktes Functionaltheorem besitzt *).

Sei die lineare homogene irreductible **) Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(32.)\qquad y^{(m)}+p_1y^{(m-1)}+\cdots+p_my = 0$$

und $y_1=f_1(x)$ ein particuläres Integral derselben, welche ein Functionaltheorem von der Form

$$(33.)\qquad \begin{cases} f_1[\varphi(x_1,\ x_2)] \\ = F\{x_1,\ f_1(x_1),\ f_1'(x_1),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_1),\ x_2,\ f_1(x_2),\ f_1'(x_2),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_2)\} \end{cases}$$

besitzt, so darf man nach den oben bewiesenen Sätzen das Integral $f_1(x_1)$ auf der rechten Seite von (33.) durch ein beliebiges particuläres Integral der Gleichung (32.) ersetzen, wenn man nur für die f-Function der linken Seite der Gleichung (33.) ein passendes particuläres Integral desselben Argumentes substituirt. Setzt man nun in (33.) $f_2(x_1),\ f_3(x_1),\ \dots\ f_m(x_1)$ statt $f_1(x_1)$, so erhält man

$$(34.)\qquad \begin{cases} c_{21}f_1[\varphi(x_1,\ x_2)]+c_{22}f_2[\varphi(x_1,\ x_2)]+\cdots+c_{2m}f_m[\varphi(x_1,\ x_2)] \\ = F\{x_1,\ f_2(x_1),\ \dots\ f_2^{(m-1)}(x_1),\ x_2,\ f_1(x_2),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_2)\}, \\ c_{31}f_1[\varphi(x_1,\ x_2)]+c_{32}f_2[\varphi(x_1,\ x_2)]+\cdots+c_{3m}f_m[\varphi(x_1,\ x_2)] \\ = F\{x_1,\ f_3(x_1),\ \dots\ f_3^{(m-1)}(x_1),\ x_2,\ f_1(x_2),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_2)\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{m1}f_1[\varphi(x_1,\ x_2)]+c_{m2}f_2[\varphi(x_1,\ x_2)]+\cdots+c_{mm}f_m[\varphi(x_1,\ x_2)] \\ = F\{x_1,\ f_m(x_1),\ \dots\ f_m^{(m-1)}(x_1),\ x_2,\ f_1(x_2),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_2)\}, \end{cases}$$

und wenn man ebenso in (33.) statt $f_1(x_1)$ auf der rechten Seite die par-

---

*) Eine andere Herleitung des gleich zu beweisenden Satzes wird man in einer demnächst erscheinenden Arbeit über die algebraischen Beziehungen zwischen den particulären Integralen einer homogenen linearen irreductibeln Differentialgleichung und deren Ableitungen finden.

**) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass früher ebenso wie hier nicht die Irreductibilität der Differentialgleichung vorausgesetzt zu werden braucht, sondern dass die Annahme genügt, dass die algebraische Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sei, und dass das betrachtete particuläre Integral nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet.

ticulären Integrale

$$\begin{array}{llll} f_1(x_1)+\varkappa_{12}f_2(x_1), & f_2(x_1)+\varkappa_{21}f_1(x_1), & \dots & f_m(x_1)+\varkappa_{m1}f_1(x_1), \\ f_1(x_1)+\varkappa_{13}f_3(x_1), & f_2(x_1)+\varkappa_{23}f_3(x_1), & \dots & f_m(x_1)+\varkappa_{m2}f_2(x_1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_1)+\varkappa_{1m}f_m(x_1), & f_2(x_1)+\varkappa_{2m}f_m(x_1), & \dots & f_m(x_1)+\varkappa_{m\,m-1}f_{m-1}(x_1) \end{array}$$

substituirt, so wird man $m(m-1)$ Gleichungen erhalten, deren linke Seiten sämmtlich die Form haben

$$C_1f_1[\varphi(x_1, x_2)]+C_2f_2[\varphi(x_1, x_2)]+\dots+C_mf_m[\varphi(x_1, x_2)];$$

eliminirt man zwischen diesen $m(m-1)$ Gleichungen und den m Gleichungen (33.) und (34.) die (m^2-1) Grössen

$$\begin{array}{l} f_1'(x_2),\ f_1''(x_2),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_2),\quad f_1'(x_1),\ f_1''(x_1),\ \dots\ f_1^{(m-1)}(x_1), \\ f_2'(x_1),\ f_2''(x_1),\ \dots\ f_2^{(m-1)}(x_1),\ \dots\ f_m'(x_1),\ f_m''(x_1),\ \dots\ f_m^{(m-1)}(x_1), \end{array}$$

so ergiebt sich, wenn man zugleich $\varphi(x_1, x_2) = X$ setzt, eine Beziehung der Form

$$(35.)\quad \begin{cases} \Phi\{f_1(X),\ f_2(X),\ \dots\ f_m(X),\ x_1,\ f_1(x_1),\ f_2(x_1),\ \dots \\ \qquad f_m(x_1),\ x_2,\ f_1(x_2),\ f_2(x_2),\ \dots\ f_m(x_2)\} = 0, \end{cases}$$

worin Φ eine algebraische Function bedeutet. Diese Gleichung würde aber ein Functionaltheorem für die particulären Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung in der Form ausdrücken, wie es von mir in meiner oben erwähnten Arbeit behandelt worden, und für welche die Unmöglichkeit der Existenz nachgewiesen worden; es wird somit auch für lineare homogene Differentialgleichungen kein Functionaltheorem der Form (33.) existiren können, und wir erhalten daher mit Rücksicht auf die oben bewiesene Reduction der allgemeinen Frage auf die für lineare homogene Differentialgleichungen den folgenden Satz:

Es giebt überhaupt keine Function, für welche der Werth für eine algebraische Verbindung zweier von einander unabhängiger Argumente sich algebraisch durch die Werthe der Function für die einzelnen Argumente, deren Ableitungen und die Argumente selbst ausdrücken lässt, wenn nicht die erste Ableitung der Function algebraisch von eben dieser abhängt.

Heidelberg, im April 1887.

Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter.

Hierzu Figurentafel II.

(Von Herrn *Bigler* in Bern.)

Das Integral $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$, welches gewöhnlich *Euler*sches Integral erster Art genannt wird, hat nur so lange eine Bedeutung, als die reellen Componenten von α und β positiv sind, weil im andern Falle die beiden Pole 0 und 1 nicht mehr zugänglich sind. Ebenso muss in dem Integral $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, durch welches gewöhnlich die Gammafunction definirt wird, α als positiv vorausgesetzt werden. Beide Integrale legen also den Argumenten der Gammafunction lästige Beschränkungen auf. Die gewonnenen Resultate sind in Folge dessen zunächst nur unter Bedingungen gültig, und aus dem Begriffe der Continuität schliesst man auf ihre allgemeine Gültigkeit. Allerdings giebt es auch Abhandlungen, wo das Product

$$\lim_{N=\infty} \frac{N!N^a}{a(a+1)(a+2)\dots(a+N)}$$

als Definition der Gammafunction aufgestellt wird und wo von hier aus die allgemein gültigen Relationen abgeleitet werden. Herr *Weierstrass* hat bemerkt*), dass $1:\Gamma(u)$ in eine für alle Werthe von u convergirende Reihe nach aufsteigenden Potenzen von u entwickelt werden kann. An diese Bemerkung anknüpfend, hat *Hermann Hankel* eine Integralformel für $1:\Gamma(u)$ aufgestellt**), die für jeden endlichen Werth des Argumentes gilt. Meines Wissens wurde dieselbe seither viel zu wenig angewendet. Ich stelle sie nun als Definition der Gammafunction auf und will von hier aus einige bekannte Relationen ableiten. Wenn eine Variable x durch $a+ib = me^{i\theta}$ dargestellt ist, wo a, b, θ reell und m positiv sind, so schreibe ich $a = \text{recp.}\,x$, $b = \text{imcp.}\,x$, $m = \text{mod.}\,x$ und nenne m den absoluten Betrag, θ die Phase der Variabeln.

---

*) „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten". Dieses Journal, Bd. 51, S. 7 (1854).

**) „Die *Euler*schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes." *Schlömilchs* Zeitschrift, Bd. 9, S. 7 (1864).

Die Ebene, in der a und b die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes sind, der den augenblicklichen Werth der Variabeln x versinnlicht, nenne ich x-Feld, die Abscissenaxe Realitätslinie, die Ordinatenaxe laterale Axe und sage, ∞ sei durch den Horizont dargestellt. Einen grossen positiven Werth, der bestimmt ist, unendlich zu werden, nenne ich Ostpunkt und unterscheide so die Weltgegenden des Horizontes. Wenn die Phase θ wächst, so nenne ich in Bezug auf den Ursprung die Bewegung des Punktes x positiv oder rechtläufig, wenn sie abnimmt, negativ oder rückläufig. Pole eines Integrals nenne ich diejenigen Punkte, in denen die zu integrirende Function den Charakter einer ganzen Function verliert. Ein Integrationsweg, dessen Anfang und Ende zusammenfallen, ohne dass der Werth des Integrands wiederkehrt, heisst Schlinge, geworfen aus dem vereinigten Anfangs- und Endpunkte um die betreffenden Pole. Wenn dagegen der Integrand auf denselben Werth zurückkommt, so heisst der Weg eine geschlossene Curve.

§ 1.

Das *Euler*sche Integral zweiter Art.

Die Gammafunction definire ich durch folgendes Integral:

$$\text{(I.)} \qquad \frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-a}\,dx.$$

Der Weg dieses Integrals ist eine aus dem Westpunkte um den Pol Null geworfene, rechtläufige Schlinge. (Fig. 1.) Im Punkte t werde $\log x$ reell verstanden.

Ist a gleich einer positiven, ganzen Zahl n, so schliesst sich der Weg im Westen und verwandelt sich in eine geschlossene Curve um den Pol Null. Man hat also

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-n}\,dx. \quad \text{(Weg wie in Fig. 2.)}$$

Ist $n = 0$, so hört Null auf, ein Pol des Integrals zu sein, und der Werth desselben ist also 0, somit $\Gamma(0) = \infty$. Ich bringe nun die geschlossene Curve in die Nähe von Null, so dass auf dem ganzen Wege e^x nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden kann. Es ist also

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2i\pi}\int \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda-n}}{\lambda!}\,dx. \quad \text{(Weg wie in Fig. 2.)}$$

Von dieser Summe werden aber alle Terme zerstört, und nur $\lambda = n-1$

liefert $\frac{2i\pi}{(n-1)!}$. Folglich ist

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{oder} \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Ist a eine negative ganze Zahl, z. B. $a = -n$, so folgt aus Formel (I.)

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{+n} dx \quad \text{(Weg wie in Fig. 2.)}$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda+n}}{\lambda!} \cdot dx,$$

und weil in dieser Summe der Term $\frac{1}{x}$ nicht vorkommt, so ist der Werth dieses Integrals Null, somit

$$\Gamma(-n) = \infty.$$

Ich kann nun der Formel (I.) auch folgende Gestalt geben:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{1}{2i\pi}\int \left(1+\frac{x}{N}\right)^N x^{-a} dx. \quad \text{(Weg wie in Fig. 1.)}$$

Setzt man hier $\frac{x}{N} = t$, so folgt aus dieser Formel:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{N^{-a+1}}{2i\pi}\int (1+t)^N t^{-a} dt.$$

Der Weg ist eine rechtläufige Schlinge aus dem Punkte -1 um den Pol Null. (Fig. 3.)

Wegen der sehr hohen positiven Potenz von $(1+t)$ liegt der grösste Werth des Integrals in der Nähe von Null, wo aber $(1+t)^N$ nach steigenden Potenzen von t entwickelt werden kann. Man hat also

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty} \frac{N^{-a+1}}{2i\pi} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N} \binom{N}{\lambda} \int t^{\lambda-a} dt. \quad \text{(Weg wie in Fig. 3.)}$$

Nun ist aber

$$\text{(II.)} \qquad \frac{(-1)^\lambda . 2i \sin a\pi}{1-a+\lambda} = \int x^{-a+\lambda} dx,$$

wenn der Integrationsweg eine aus dem Punkte -1 um den Pol Null geworfene, rechtläufige Schlinge ist. (Fig. 3.) Um diese Formel zu prüfen, nehme ich an, die reelle Componente von $\lambda - a + 1$ sei positiv. In diesem Falle ist der Pol Null zugänglich, und man hat

$$\int t^{\lambda-a} dt = e^{-i\pi(\lambda-a)}\int_{-1}^{0} (-t)^{\lambda-a} dt + e^{i\pi(\lambda-a)}\int_{0}^{-1} (-t)^{\lambda-a} dt$$
$$= (-1)^\lambda (e^{i\pi a} - e^{-i\pi a})\int_0^1 t^{\lambda-a} dt$$
$$= \frac{(-1)^\lambda . 2i \sin a\pi}{\lambda-a+1},$$

also gleich dem Ausdrucke auf der linken Seite. Durch Anwendung Formel (II.) findet man nun

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\lim_{N=\infty} N^{-a+1}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N}\frac{(-1)^\lambda\binom{N}{\lambda}}{\lambda-a+1},$$

und weil

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N}\frac{(-1)^\lambda\binom{N}{\lambda}}{-a+\lambda+1} = \frac{N!}{(-a+1)(-a+2)\dots(-a+1+N)},$$

so ist auch:

$$\text{(III.)}\qquad \frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\lim_{N=\infty}\frac{N^{-a+1}.N!}{(-a+1)(-a+2)\dots(-a+1+N)}.$$

Nun ist aber

$$\sin a\pi = a\pi\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left(1-\frac{a^2}{\lambda^2}\right),$$

somit

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{N=\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+N)}{N!N^a}$$

oder

$$\text{(IV.)}\qquad \Gamma(a) = \lim_{N=\infty}\frac{N!N^a}{a(a+1)(a+2)\dots(a+N)}.$$

Aus Formel (IV.) folgt, dass

$$\Gamma(1-a) = \lim_{N=\infty}\frac{N!N^{-a+1}}{(-a+1)(-a+2)\dots(-a+1+N)},$$

und setzt man diesen Werth in Formel (III.) ein, so erhält man Relation:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\Gamma(1-a),$$

oder

$$\text{(V.)}\qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Vermöge dieser Gleichung kann man nun der Formel (I.) folg Gestalt geben:

$$\text{(VI.)}\qquad \Gamma(a) = \frac{1}{2i\sin a\pi}\int e^x x^{a-1}dx.\quad\text{(Weg wie in Fig. 1.)}$$

Wird diese Formel mit a multiplicirt und partiell integrirt, so hat ma

$$a\Gamma(a) = \frac{1}{2i\sin a\pi}\cdot\left[e^x x^a\right]_{\text{Anfangswerth}}^{\text{Endwerth}} + \frac{1}{2i\sin((a+1)\pi)}\cdot\int e^x x^a dx,$$

oder

$$\text{(VII.)} \qquad a\Gamma(a) = \Gamma(1+a).$$

Ist nun die recp. a positiv, so ist in Formel (VI.) der Pol Null zugänglich und der Integrationsweg lässt sich auf die Realitätslinie von $-N$ bis 0 zusammenziehen. Man erhält

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i\sin a\pi}\Big[e^{-i\pi(a-1)}\int_{-N}^{0} e^{x}(-x)^{a-1}dx + e^{i\pi(a-1)}\int_{0}^{-N} e^{x}(-x)^{a-1}dx\Big]$$

$$= \frac{1}{2i\sin a\pi}(e^{i\pi a}-e^{-i\pi a})\int_0^N e^{-x}x^{a-1}dx,$$

$$\text{(VIII.)} \qquad \Gamma(a) = \int_0^N e^{-x}x^{a-1}dx.$$

Aus Formel (I.) folgt für $a = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2i\pi}\int e^{x}x^{-\frac{1}{2}}dx, \quad \text{(Weg wie in Fig. 1)}$$

und weil Null zugänglich ist, so kann man den Weg auf die Realitätslinie von $-N$ bis 0 zusammenziehen und hat

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx,$$

also nach Formel (VIII.)

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\pi}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

oder

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Ich setze

$$f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\Big((a+\lambda-\tfrac{1}{2})\log\Big(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\Big)-1\Big),$$

also

$$f(a+\mu-1)-f(a+\mu) = (a+\mu-\tfrac{1}{2})\log\frac{a+\mu}{a+\mu-1}-1,$$

folglich

$$f(a)-f(a+1) = (a+\tfrac{1}{2})\log\frac{a+1}{a}-1,$$

somit

$$f(a)-f(a+n) = -n-\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\log(a+\lambda)+(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n)-(a-\tfrac{1}{2})\log a,$$

oder

$$\begin{aligned} f(a)-f(a+n)-a &= -(a+n)-\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\log(a+\lambda)+(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n) \\ &\qquad -(a-\tfrac{1}{2})\log a, \\ &= -(a+n)-\log[a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)] \\ &\qquad +(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n)-(a-\tfrac{1}{2})\log a, \\ &= -(a+n)-\log\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}+(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n) \\ &\qquad -(a-\tfrac{1}{2})\log a, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \log\Gamma(a)+a &= f(a)-f(a+n)+(a+n)+\log\Gamma(a+n)-(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n) \\ &\qquad +(a-\tfrac{1}{2})\log a. \end{aligned}$$

Nun ist aber für ein sehr grosses n

$$\log\Gamma(a+n)=\log\Gamma(n)+a\log n,\quad f(a+n)=0,$$
$$(a+n-\tfrac{1}{2})\log(a+n)=(a+n-\tfrac{1}{2})\log n,$$

also

$$\begin{aligned} \log\Gamma(a)+a &= f(a)+n+\log\Gamma(n)+a\log n-(a+n-\tfrac{1}{2})\log n+(a-\tfrac{1}{2})\log a \\ &= f(a)+n+\log\Gamma(n)+(a-\tfrac{1}{2})\log a-(n-\tfrac{1}{2})\log n. \end{aligned}$$

Hier setze ich nun $a=\frac{1}{2}$ und finde

$$\tfrac{1}{2}\log\pi+\tfrac{1}{2} = f(\tfrac{1}{2})+n+\log\Gamma(n)-(n-\tfrac{1}{2})\log n.$$

Aus der Formel

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left((a+\lambda-\tfrac{1}{2})\log\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}-1\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2a+2\lambda-1)^{2n}} \end{aligned}$$

folgt für $a=\frac{1}{2}$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2\lambda)^{2n}}.$$

Ferner ist

$$\sin a\pi = a\pi\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{\lambda^2}\right),$$

also

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right) &= \sum_{\lambda=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{(2\lambda)^2}\right), \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^{2n}}{n(2\lambda)^{2n}}, \end{aligned}$$

somit

$$\int_0^1 \log\left(\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right)\cdot dx = -\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)(2\lambda)^{2n}},$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{(2\lambda)^{2n}},$$

$$= 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2\lambda)^{2n}}-\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n(2\lambda)^{2n}},$$

$$= 2f(\tfrac{1}{2})+\log\frac{2}{\pi},$$

folglich

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\int_0^1 \log\left(\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi x}\right)\cdot dx.$$

Wenn

$$A = \int_0^1 \log\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx,$$

so ist auch

$$A = \int_0^1 \log\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx,$$

also durch Addition

$$2A = \int_0^1 \log(2\sin\pi x).dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \log\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx$$

$$= \int_0^1 \log\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx = A,$$

somit $A = 0$.

Ferner ist

$$-\tfrac{1}{2}\int_0^1 \log(\pi x)\cdot dx = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\log\pi,$$

folglich

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(1-\log 2),$$

also

$$\tfrac{1}{2}\log 2\pi = n+\log\Gamma(n)-(n-\tfrac{1}{2})\log n,$$

und demnach

$$\log\Gamma(a)+a = (a-\tfrac{1}{2})\log a+\tfrac{1}{2}\log 2\pi+f(a),$$

oder

$$\text{(IX.)} \qquad \Gamma(a) = a^{a-\frac{1}{2}}\cdot e^{-a}\sqrt{2\pi}\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}$$

und

$$\text{(IX'.)} \qquad \lim_{a=\infty}\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}.e^{-a}a^{a-\frac{1}{2}}} = 1.$$

§ 2.

Ueber das *Euler*sche Integral erster Art.

Es sei

$$V = \int x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Der Weg dieses Integrales sei eine aus dem Punkte t um den Pol Null geworfene, rechtläufige Schlinge. (Fig. 4.) Im Punkte A seien $\log x$ und $\log(1-x)$ reell verstanden. Ebenso sei

$$W = \int x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

und der Weg dieses Integrals sei eine aus dem Punkte t um den Pol 1 geworfene, rechtläufige Schlinge. (Fig. 5.)

Erkennungsort sei der Punkt B, wo $\log x$ und $\log(1-x)$ reell verstanden werden. Aus diesen zwei Integralen bilde ich nun folgenden Ausdruck:

$$Y = aV+bW,$$

wo die Factoren a und b so bestimmt werden sollen, dass der Werth desselben vom Anfangspunkte der Schlingenwege unabhängig ist.

Ich verlege den Ausgangspunkt der Schlingenwege von t nach t' und bilde die neuen Wege so, wie sie in Fig. 6 gezeichnet sind. Von t' bis t sollen alle vier Wege zusammenfallen. Man findet

$$Y = a\left(\int_{t'}^{t} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + V + e^{2i\pi\alpha}\cdot\int_{t}^{t'} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right)$$
$$+b\left(\int_{t'}^{t} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + W + e^{2i\pi\beta}\int_{t}^{t'} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right)$$

oder

$$Y = aV+bW+(a(e^{2i\pi\alpha}-1)+b(e^{2i\pi\beta}-1))\int_{t}^{t'} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

wo V und W die Schlingenintegrale vom Punkte t aus um die Pole 0 und 1 bezeichnen. Soll nun dieser Ausdruck vom Ausgangspunkte unabhängig sein, so muss

$$a(e^{2i\pi\alpha}-1)+b(e^{2i\pi\beta}-1) = 0$$

sein; man setze also

$$a = e^{2i\pi\beta}-1, \quad b = -(e^{2i\pi\alpha}-1)$$

und demnach

$$Y = (e^{2i\pi\beta}-1)V-(e^{2i\pi\alpha}-1)W$$

oder

$$\text{(I.)} \qquad Y = 2i(e^{i\pi\beta}\sin\pi\beta\, V - e^{i\pi\alpha}\sin\pi\alpha\, W).$$

Dieser Ausdruck soll nun noch so umgeformt werden, dass er für recp. $\alpha =$ positiv und recp. $\beta =$ positiv in das *Euler*sche Integral erster Art übergeht. In diesem Falle sind die beiden Pole Null und 1 zugänglich. Man verlege nun den Ausgangspunkt der Schlingenwege in einen Punkt der Realitätslinie zwischen 0 und 1 und dränge beide Wege auf die Realitätslinie zusammen. Es ist

$$V = \int_t^0 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + e^{2i\pi\alpha}\int_0^t x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

oder

$$V = (e^{2i\pi\alpha}-1)\int_0^t x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= 2i\sin\pi\alpha\,.\,e^{i\pi\alpha}\int_0^t x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Ebenso findet man, dass

$$W = \int_t^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + e^{2i\pi\beta}\int_1^t x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= -(e^{2i\pi\beta}-1)\int_t^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= -2i\sin\pi\beta\,.\,e^{i\pi\beta}\int_t^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Man findet also für den Fall recp. $\alpha =$ positiv, recp. $\beta =$ positiv,

$$Y = -4\sin\pi\alpha\,.\,\sin\pi\beta\,.\,e^{i\pi(\alpha+\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Der Factor, mit dem in Formel (I.) Y noch multiplicirt werden muss, um das *Euler*sche Integral erster Art darzustellen, ist somit $\frac{1}{-4\sin\pi\alpha\,.\,\sin\pi\beta\,.\,e^{i\pi(\alpha+\beta)}}$. Wird diese Multiplication ausgeführt und die neue Function mit U bezeichnet, so hat man

$$\text{(II.)} \qquad U(\alpha,\,\beta) = \frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\,e^{-i\pi\alpha}\,V - \frac{1}{2i\sin\pi\beta}\,e^{-i\pi\beta}\,W.$$

Es soll nun bewiesen werden, dass

$$U(\alpha,\,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ist. Weil

$$\frac{\partial x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}-(\alpha+\beta)x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1},$$

so ist

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{\partial x}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1},$$

und durch Integration findet man

$$V = \frac{1}{\alpha}\cdot 2i\sin\pi\alpha . e^{i\pi\alpha}. t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx;$$

ebenso ist

$$W = \frac{1}{\alpha}\cdot 2i\sin\pi\beta . e^{i\pi\beta}. t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

somit

$$U(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\Big[\frac{1}{2i\sin\pi(\alpha+1)}e^{-i\pi(\alpha+1)}\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx - \frac{1}{2i\sin\pi\beta}e^{i\pi\beta}\int x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx\Big].$$

Diese Formel ergiebt nun die Relation

$$\text{(III.)} \qquad U(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\cdot U(\alpha+1,\beta),$$

und aus derselben folgt sogleich

$$\text{(IV.)} \qquad U(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+1+\beta)(\alpha+2+\beta)\dots(\alpha+n-1+\beta)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}\cdot U(\alpha+n,\beta).$$

Was nun auch α für einen endlichen Werth haben mag, so kann man doch bewirken, dass die reelle Componente von $\alpha+n$ positiv wird, dass somit der Pol Null zugänglich gemacht werden kann. In diesem Falle lege ich den Ausgangspunkt der Schlingen in den Punkt Null, und weil nun $V=0$ ist, so hat man

$$U(\alpha+n,\beta) = -\frac{e^{-i\pi\beta}}{2i\sin\pi\beta}\int x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Der Weg ist hier eine aus dem Punkte Null um den Pol 1 geworfene, rechtläufige Schlinge. (Fig. 7.)

Ich kann dem Integral auch folgende Form geben:

$$U(\alpha+n,\beta) = \frac{1}{2i\sin\pi\beta}\int x^{\alpha+n-1}(x-1)^{\beta-1}dx.$$

(Weg wie in Fig. 6, $\log(x-1)$ im Punkte A reell verstanden.)

Hier setze man nun $x-1 = t$, und erhält

$$U(\alpha+n,\ \beta) = \frac{1}{2i\sin n\beta}.\int (1+t)^{\alpha+n-1} t^{\beta-1} dt,$$

ein Integral, dessen Weg eine aus dem Punkte -1 um den Pol Null geworfene, rechtläufige Schlinge ist. (Fig. 3.)

Man denke sich nun n positiv sehr gross und setze

$$t = \frac{x}{n},$$

wodurch man erhält

$$U(\alpha+n,\ \beta) = \frac{n^{-\beta}}{2i\sin n\beta}\int \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\alpha+n-1} x^{\beta-1} dx \quad \text{(Weg wie in Fig. 1.)},$$

oder auch

$$U(\alpha+n,\ \beta) = \frac{n^{-\beta}}{2i\sin n\beta}\int e^x x^{\beta-1} dx \quad \text{(Weg wie oben.)},$$

also nach Formel (VI.) des § 1

$$U(\alpha+n,\ \beta) = n^{-\beta}\,\Gamma(\beta).$$

Setzt man nun diesen Werth von $U(\alpha+n, \beta)$ in Formel (IV.) des § 2 ein, so erhält man schliesslich vermöge der Formel (IV.) des § 1 die Gleichung

$$\text{(V.)} \qquad U(\alpha,\ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Liegt der Anfangspunkt der Schlingenwege in Formel (II.) auf der Realitätslinie zwischen 0 und 1, so kann die Schlinge V so gelegt werden, dass $(1-x)^{\beta-1}$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden kann, und die Schlinge W so, dass hier eine Entwickelung nach steigenden Potenzen von $(1-x)$ möglich ist. Es sei also

$$U(\alpha,\ \beta) = \frac{1}{2i\sin n\alpha}\cdot e^{-in\alpha} V - \frac{1}{2i\sin n\beta}\cdot e^{-in\beta} W$$

(Wege wie in Fig. 8, wo die Schlingen die oben erwähnten Eigenschaften besitzen.)

Weil nun aber

$$\begin{aligned} V &= \int \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{\beta-1}{\lambda} x^{\alpha+\lambda-1} dx \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{\beta-1}{\lambda}\cdot e^{in\alpha}\cdot \frac{2i\sin n\alpha\, t^{\alpha+\lambda}}{\alpha+\lambda} \\ &= 2i\sin \pi\alpha e^{i\pi\alpha}\cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \binom{\beta-1}{\lambda} t^{\alpha+\lambda} \end{aligned}$$

und

$$W = -\int (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du,$$

(Weg eine rechtläufige Schlinge um Null, weil $1-x=u$ gesetzt wurde. Fig. 9.) also

$$W = -\int \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \binom{\alpha-1}{\lambda} u^{\lambda+\beta-1} du$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \binom{\alpha-1}{\lambda} e^{i\pi\beta} \frac{2i \sin\pi\beta u_1^{\lambda+\beta}}{\lambda+\beta}$$

$$= -2i\sin\pi\beta e^{i\pi\beta} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\binom{\alpha-1}{\lambda}(1-t)^{\beta+\lambda}}{\beta+\lambda},$$

so ist für $0<t<1$:

$$\text{(VI.)} \quad U(\alpha, \beta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\binom{\beta-1}{\lambda} t^{\alpha+\lambda}}{\alpha+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}\binom{\alpha-1}{\lambda}(1-t)^{\lambda+\beta}}{\beta+\lambda}.$$

Ich will nun einige besondere Fälle betrachten.

$$\text{(1.)} \quad m\alpha+n\beta = \mu;$$

m und n sind positive ganze Zahlen, hingegen μ sei eine beliebige ganze Zahl.

In diesem Falle kann ich der Function U folgende Form geben:

$$\text{(VII.)} \quad \begin{cases} U(\alpha, \beta) = \dfrac{ie^{-i\pi\left(m\alpha+\frac{\mu-m\alpha}{n}\right)}}{2\sin m\alpha\pi}\left[\dfrac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\alpha} e^{i\pi\left(m\alpha+\frac{\mu-m\alpha}{n}-1-\alpha\right)} . V \right. \\ \left. \qquad + \dfrac{-\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\beta} \cdot e^{i\pi(m\alpha-1)} W\right]. \end{cases}$$

Man setze nun

$$T = \frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\alpha} \cdot e^{i\pi\left(m\alpha+\frac{\mu-m\alpha}{n}-1-\alpha\right)} V + \frac{-\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\beta} \cdot e^{i\pi(m\alpha-1)} W$$

$$= \frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\alpha} \cdot e^{i\pi(m\alpha+\beta-1-\alpha)} V + \frac{\sin n\pi\beta}{\sin\pi\beta} \cdot e^{i\pi(2m\alpha+n\beta-1)} W$$

$$= e^{i\pi(\beta-1)} V \cdot \frac{e^{i\pi m\alpha}\sin m\alpha\pi}{e^{i\pi\alpha}\sin\pi\alpha} + e^{i\pi(\beta-1+2m\alpha)} W \cdot \frac{e^{i\pi n\beta}\sin n\beta\pi}{e^{i\pi\beta}\sin\pi\beta}$$

$$= e^{i\pi(\beta-1)} V \cdot \frac{1-e^{2i\pi m\alpha}}{1-e^{2i\pi\alpha}} + e^{i\pi(\beta-1+2m\alpha)} W \cdot \frac{1-e^{2i\pi n\beta}}{1-e^{2i\pi\beta}}$$

$$= e^{i\pi(\beta-1)} V(1+e^{2i\pi\alpha}+e^{4i\pi\alpha}+\cdots+e^{2i\pi(m-1)\alpha})$$

$$+ e^{i\pi(\beta-1+2m\alpha)} W(1+e^{2i\pi\beta}+e^{4i\pi\beta}+\cdots+e^{2i\pi(n-1)\beta}).$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich sofort, dass

$$T = \int x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{\mu-m\alpha}{n}-1}dx,$$

folglich

$$\text{(VIII.)} \quad U\left(\alpha, \frac{\mu-m\alpha}{n}\right) = \frac{ie^{-i\pi\left(m\alpha+\frac{\mu-m\alpha}{n}\right)}}{2\sin(m\alpha\pi)}\cdot\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{\mu-m\alpha}{n}-1}dx.$$

Der Weg dieses Integrals ist eine geschlossene Curve, die zuerst m-mal den Pol Null und dann n-mal den Pol 1 in positiver Richtung umläuft. Im Punkte A werden $\log x$, $\log(x-1)$ reell verstanden. (Fig. 10.)

Setze ich $m = 1$, $n = 1$, also $\alpha+\beta = \mu$, so folgt aus Formel (VIII.)

$$\text{(VIII'.)} \quad U(\alpha, \mu-\alpha) = \frac{i(-1)^{\mu}}{2\sin\pi\alpha}\cdot\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\mu-\alpha-1}dx,$$

wo der Integrationsweg eine geschlossene, rechtläufige Curve um die Pole 0 und 1 ist. (Fig. 11.)

Weil nun ausserhalb dieser Curve für das Integral keine Pole vorhanden sind, so kann man den Weg so weit ausdehnen, dass eine Entwickelung nach fallenden Potenzen von x möglich ist. Man findet

$$\begin{aligned} U(\alpha, \mu-\alpha) &= \frac{i(-1)^{\mu}}{2\sin\pi\alpha}\cdot\int\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\binom{\mu-\alpha-1}{\lambda}x^{\mu-\lambda-2}dx \\ &= \frac{i(-1)^{\mu}}{2\sin\pi\alpha}\cdot(-1)^{\mu-1}\binom{\mu-\alpha-1}{\mu-1}\cdot 2i\pi \\ &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\binom{\mu-\alpha-1}{\mu-1}. \end{aligned}$$

2. Ich nehme ferner an, dass $m\alpha-n\beta = \mu$ sei.

In diesem Falle kann ich der Gleichung (II.) folgende Gestalt geben:

$$\text{(IX.)} \quad \left\{ \begin{aligned} &U\left(\alpha, \frac{m\alpha-\mu}{n}\right) \\ &= \frac{i}{2\sin m\alpha\pi}\cdot e^{-i\pi\left(m\alpha-\frac{m\alpha-\mu}{n}\right)}\left(e^{i\pi\left(m\alpha-\frac{m\alpha-\mu}{n}+1-\alpha\right)}\cdot\frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\alpha}\cdot V\right. \\ &\qquad\left.+e^{i\pi(m\alpha-2\beta)}\cdot\frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\beta}W\right). \end{aligned}\right.$$

Der Ausdruck in der Klammer werde wieder mit T bezeichnet; also

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\pi\alpha}\cdot e^{i\pi\left(m\alpha-\frac{m\alpha-\mu}{n}+1-\alpha\right)}V+e^{i\pi(m\alpha-2\beta)}\cdot\frac{\sin m\alpha\pi}{\sin\beta\pi}W \\ &= e^{-i\pi(\beta-1)}V\cdot\frac{1-e^{2i\pi m\alpha}}{1-e^{2i\pi\alpha}}-e^{-i\pi(\beta-1-2m\alpha)}\cdot e^{-2i\pi\beta}W\frac{1-e^{-2i\pi\beta n}}{1-e^{-2i\pi\beta}} \\ &= e^{-i\pi(\beta-1)}\left(V+e^{2i\pi\alpha}V+e^{4i\pi\alpha}V+\cdots+e^{2i\pi\alpha(m-1)}V\right) \\ &\quad+e^{-i\pi(\beta-1-2m\alpha)}\left(-e^{-2i\pi\beta}W-e^{-4i\pi\beta}W-\cdots-e^{-2i\pi\beta n}W\right) \end{aligned}$$

und folglich

$$T = \int x^{a-1}(x-1)^{\frac{ma-\mu}{n}-1}dx.$$

Der Weg dieses Integrals ist eine geschlossene Curve um die Pole Null und 1, und zwar wird der Pol Null m-mal rechtläufig und der Pol 1 n-mal rückläufig umlaufen. (Fig. 12.)

Man hat also

$$\text{(IX}'.) \quad U\left(\alpha, \frac{m\alpha-\mu}{n}\right) = \frac{ie^{-i\pi\left(m\alpha-\frac{m\alpha-\mu}{n}\right)}}{2\sin m\alpha\pi} \cdot \int x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{m\alpha-\mu}{n}-1}dx.$$

(Weg wie in Fig. 12.)

Aus dieser Formel folgt für $m = n = 1$:

$$U(\alpha, \alpha-\mu) = \frac{i(-1)^{\mu}}{2\sin\alpha\pi}\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\alpha-\mu-1}dx. \quad \text{(Weg wie in Fig. 13.)}$$

Man kann diese Formel auch auf folgende Art schreiben:

$$\text{(X.)} \quad \frac{\Gamma(\alpha-\mu)}{\Gamma(2\alpha-\mu)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{i(-1)^{\mu}}{2\pi}\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\alpha-\mu-1}dx. \quad \text{(Weg wie in Fig. 13.)}$$

3. Der Parameter β liege auf der östlichen Seite des Meridians durch 1.

Weil durch diese Bedingung der Pol 1 zugänglich gemacht wird, so verlege man den Ausgangspunkt der Schlingenwege in den Punkt 1, und weil nun $W = 0$, so hat man

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2i\sin\pi\alpha}\cdot e^{-i\pi\alpha}\int x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{i}{2\sin\pi\alpha}\int(-x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

oder

$$\text{(XI.)} \quad \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{i}{2\pi}\int(-x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

(Weg wie Fig. 14; im Punkte A werden $\log(-x)$, $\log(1-x)$ reell verstanden.)

4. Der Parameter α liege auf der östlichen Seite des Meridians durch 1.

Wie durch die Bedingung 3. der Pol 1 zugänglich gemacht wurde, so wird nun durch diese Bedingung der Pol 0 zugänglich gemacht. Man

verlege den Ausgangspunkt der Schlingenwege in den Punkt 0, und weil hier $V = 0$, so hat man

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = -\frac{1}{2i\sin\pi\beta}\cdot e^{-i\pi\beta}\int x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$= \frac{1}{2i\sin\pi\beta}\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}dx$$

oder

$$\text{(XII.)} \qquad \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2i\pi}\int x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}dx.$$

(Weg wie in Fig. 7; in A werden $\log x$, $\log(x-1)$ reell verstanden.)

§ 3.

Darstellung von $\Gamma(\frac{1}{3})$ und $\Gamma(\frac{1}{4})$ durch elliptische Integrale.

1. Darstellung von $\Gamma(\frac{1}{3})$ durch K.

Sind die reellen Componenten von α und β positiv, so folgt aus Formel (II.) des § 2, dass

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

und also für $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \int_0^1 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

oder

$$\frac{1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Nach der Formel

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(2a).\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2a-1}.\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{6}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{-\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})},$$

also

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^2.(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{(\Gamma(\frac{2}{3}).\Gamma(\frac{1}{3}))^2} = \frac{1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Nun ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{3}).\Gamma(\tfrac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

und man hat also

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}.3}\int_0^1 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Hier setze man nun $x = x_1^3$, und findet

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^3)}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x(1-x)(x-e^{\frac{2i\pi}{3}})(x-e^{-\frac{2i\pi}{3}}))}}.$$

Ich setze ferner

$$x = -\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

also

$$1-x = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-y),\quad x-e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(y-i),$$

$$x-e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(y+i),\quad x(1-x) = -\tfrac{3}{4}(1+y^2)+\tfrac{3}{4}\left(\sqrt{3}y+\frac{y}{\sqrt{3}}\right),$$

$$x(1-x)(x-e^{\frac{2i\pi}{3}})(x-e^{-\frac{2i\pi}{3}}) = \frac{3\sqrt{3}}{(4)^2}(4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2);$$

folglich ist

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}}$$

oder auch

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}},$$

und weil nun leicht bewiesen werden kann, dass

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}},$$

so hat man

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dy}{\sqrt{4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2}}.$$

Man setze nun

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+u\right),\quad 1+y^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+u\right)},$$

$$4y(1+y^2)-\sqrt{3}(1+y^2)^2 = \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}\left(4.\sin\left(\frac{\pi}{4}+u\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}+u\right)-\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}\cdot(2(\cos^2 u-\sin^2 u)-\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+u\right)}(2-\sqrt{3}-4\sin^2 u),$$

also

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{du}{\sqrt{2-\sqrt{3}-4\sin^2 u}},$$

$$= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}\frac{d\sin u}{\sqrt{(1-\sin^2 u)(2-\sqrt{3}-4\sin^2 u)}}.$$

Es sei nun

$$k = \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad k^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

und wenn $\sin u = kS\alpha$ gesetzt wird, so hat man schliesslich

$$\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{4\pi} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\int_0^1\frac{dS}{\sqrt{(1-S^2\alpha)(1-k^2S^2\alpha)}}$$

oder

$$\text{(XIII.)}\qquad (\Gamma(\tfrac{1}{3}))^3 = \frac{2^{\frac{7}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}}\pi K\quad \left(k = \sin\frac{\pi}{12}\right).$$

2. Darstellung von $\Gamma(\frac{1}{4})$ durch K.

Es ist

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \int_0^1 (x(1-x))^{-\frac{3}{4}}dx.$$

Wenn

$$x(1-x) = \tfrac{1}{4}u^4,$$

so ist

$$(2x-1)^2 = 1-u^4,\quad x = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-u^4}).$$

Während x von Null bis $\frac{1}{2}$ geht, wächst u von Null bis zu 1, $\sqrt{1-u^4}$ ist negativ, und während x von $\frac{1}{2}$ bis 1 geht, nimmt u von seinem Maximum 1 bis zu Null ab.

$$dx = \frac{-u^3}{\sqrt{1-u^4}}du, \quad (x(1-x))^{-\frac{3}{4}}dx = -2\sqrt{2}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

ist im ersten Intervall positiv, weil $\sqrt{1-u^4}$ negativ ist, und im zweiten, weil du negativ ist. Also ist

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}).\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}},$$

wenn $\sqrt{1-u^4}$ positiv verstanden wird. Versucht man wegen des Factors $1+u^2$ die Setzung $u = \operatorname{tg}\varphi$, so führt der andere Factor $1-u^2$ des Radicands (abgesehen vom Nenner $\cos^2\varphi$) zu $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1-2\sin^2\varphi$. Da nun ohnehin der Factor $1-\sin^2\varphi$ im neuen Radicand auftreten wird, so sieht man sich genöthigt, $2\sin^2\varphi = S(t)^2$, folglich den neuen Radicanden gleich $(1-S^2t)(1-\frac{1}{2}S^2t)$ zu setzen, muss also $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ annehmen. Dann ist $\sin\varphi = kSt$, folglich

$$\cos\varphi = Dt, \quad u = k\frac{St}{Dt}, \quad du = k\frac{Ct}{D^2t}dt.$$

Weil

$$D^2t - k^2S^2t = 1-2k^2S^2t = 1-S^2t = C^2t,$$

so ist

$$1-u^2 = \frac{C^2t}{D^2t}.$$

Ferner ist

$$1+u^2 = \frac{1}{D^2t};$$

folglich

$$\sqrt{1-u^4} = \frac{Ct}{D^2t}, \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = k\,dt.$$

Wenn $u = 1$, so ist $Ct = 0$; also läuft t von Null nach K. Also

$$\text{(XIV.)} \quad (\Gamma(\tfrac{1}{4}))^2 = 4\sqrt{\pi}K \quad (k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Bern, den 4. September 1885.

Ueber die Producte von drei und vier Thetafunctionen.

(Von Herrn *W. Scheibner* in Leipzig.)

1.

Um die Producte *dreier* Thetafunctionen zu entwickeln, benutzen wir die Gleichungen:

$$\vartheta(q^2)\vartheta(2u,q^2) = \vartheta u\vartheta_3 u, \quad \vartheta(q^2)\vartheta_1(2u,q^2) = \vartheta_1 u\vartheta_2 u$$

und erhalten durch Multiplication mit $\vartheta_2 u$, resp. $\vartheta_3 u$:

$$\begin{aligned}\vartheta_2 u\vartheta(2u,q^2) &= q^{\frac{1}{4}}\sum_{mn}(-1)^m q^{2m^2+n(n+1)}\cos 4mu\cos(2n+1)u\\ &= q^{\frac{1}{4}}\sum_{mn}(-1)^m q^{2m^2+n(n+1)}\cos(4m+2n+1)u,\\ \vartheta_3 u\vartheta_1(2u,q^2) &= q^{\frac{1}{2}}\Sigma(-1)^m q^{2m(m+1)+n^2}\sin(4m+2)u\cos 2nu\\ &= q^{\frac{1}{2}}\Sigma(-1)^m q^{2m(m+1)+n^2}\sin(4m+2n+2)u.\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Doppelsummen $m = m'+n'$, $n = m'-2n'+\varepsilon$, so wird $4m+2n = 6m'+2\varepsilon$, und man erhält:

$$\begin{aligned}\vartheta_2 u\vartheta(2u,q^2) &= q^{\frac{1}{4}}\sum_{mn\varepsilon}(-1)^{m+n} q^{3m^2+6n^2+(2\varepsilon+1)(m-2n)+\varepsilon(\varepsilon+1)}\cos(6m+2\varepsilon+1)u,\\ \vartheta_3 u\vartheta_1(2u,q^2) &= q^{\frac{1}{2}}\Sigma(-1)^{m+n} q^{3m^2+6n^2+2(\overline{1+\varepsilon}\,m+\overline{1-2\varepsilon}\,n)+\varepsilon^2}\sin(6m+2\varepsilon+2)u.\end{aligned}$$

Da

$$3m' = 2m+n-\varepsilon, \quad 3n' = m-n+\varepsilon, \quad \text{mithin} \quad m\equiv n-\varepsilon \pmod{3},$$

so umfasst man alle Werthe von m und n, wenn man ε die Werthe -1, 0 und $+1$ beilegt. Dadurch wird

$$\begin{aligned}\vartheta_2 u\vartheta(2u,q^2) &= 2q^{\frac{1}{4}}\Sigma(-1)^{m+n} q^{3m^2+6n^2\pm(m-2n)}\cos(6m\pm 1)u\\ &\quad + q^{\frac{9}{4}}\Sigma(-1)^{m+n} q^{3m(m+1)+6n(n-1)}\cos(6m+3)u.\end{aligned}$$

Die letzte Summe verschwindet, weil $\Sigma(-1)^n q^{6n(n-1)} = 0$; folglich wird

$$\begin{aligned}\vartheta_2 u\vartheta(2u,q^2) &= 2q^{\frac{1}{4}}\Sigma(-1)^n q^{2n(3n-1)}\,\Sigma(-1)^m q^{m(3m+1)}\cos(6m+1)u\\ &= 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1(q^2)\chi_1(u,q).\end{aligned}$$

Analog findet man für $\varepsilon = 0$, 1 und -1:

$$\begin{aligned}\vartheta_3 u \vartheta_1(2u, q^2) &= 2q^{\frac{1}{2}} \Sigma (-1)^{m+n} q^{3m^2+6n^2+2(m+n)} \sin(6m+2)u \\ &\quad + q^{\frac{3}{2}} \Sigma (-1)^{m+n} q^{3m^2+6n(n+1)} \sin 6mu \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \Sigma (-1)^n q^{2n(3n+1)} \Sigma (-1)^m q^{(m+\frac{1}{3})(3m+\frac{1}{3})} \sin(6m+2)u \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1(q^2) \chi(u, q).\end{aligned}$$

Uebrigens kann man auch mittelst der Gleichung

$$\chi u = \frac{1}{i} q^{\frac{3}{4}} e^{3ui} \chi_1\left(u + \frac{hi}{2}\right), \quad \text{wo} \quad q = e^{-h},$$

zu χu übergehen. Lässt man ferner u um $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 u \vartheta(2u, q^2) &= 2q^{\frac{1}{4}} \Sigma (-1)^n q^{2n(3n+1)} \Sigma q^{m(3m+1)} \sin(6m+1)u \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1(q^2) \chi_2(u)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vartheta(u) \vartheta_1(2u, q^2) &= 2q^{\frac{1}{4}} \Sigma (-1)^n q^{2n(3n+1)} \Sigma q^{(m+\frac{1}{3})(3m+\frac{1}{3})} \sin(6m+2)u \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1(q^2) \chi_3(u).\end{aligned}$$

Damit gehen die Gleichungen hervor:

$$\sqrt{\varkappa} \sin\varphi = \frac{\chi u}{\chi_1 u}, \quad \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \cos\varphi = \frac{\chi u}{\chi_2 u}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}} \varDelta\varphi = \frac{\chi u}{\chi_3 u},$$

(χ ist für $\chi'(0)$ geschrieben) nebst

$$\frac{2Ku}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi, \varkappa)}, \quad \sqrt{\varkappa} = \frac{\chi_3'}{\chi_2'}, \quad \sqrt{\varkappa'} = \frac{\chi_3'}{\chi'},$$

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{\chi' \chi_2'}{\chi_1 \chi_3'}, \quad \frac{2K\sqrt{\varkappa}}{\pi} = \frac{\chi'}{\chi_1}, \quad \frac{2K\sqrt{\varkappa'}}{\pi} = \frac{\chi_2'}{\chi_1}, \quad \frac{2K\sqrt{\varkappa\varkappa'}}{\pi} = \frac{\chi_3'}{\chi_1}.$$

Wir nennen die Functionen χu, $\chi_1 u$, $\chi_2 u$, $\chi_3 u$ die *Kiepert*schen Functionen, weil Herr *Kiepert* die Beziehung zwischen $\chi_1 u$ und dem Product $\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u$ zuerst abgeleitet hat. (Dieses Journal Bd. 87, S. 213.)

Will man die Gleichung

$$\chi_1 u = \tfrac{1}{2} \chi_1 \frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1 u}$$

direct verificiren, so setze man:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 u \chi_1 u &= q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} (-1)^{m+n} q^{m(3m+1)+n(n+1)} \cos(6m+1)u \sin(2n+1)u \\ &= \tfrac{1}{2} q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} (-1)^{m+n} q^{m(3m+1)+n(n+1)} \{\sin(6m+2n+2)u - \sin(6m-2n)u\}\end{aligned}$$

und durch Vertauschung von $n+1$ und $-n$, wenn $m \equiv n$ (mod. 2):

$$= q^{\frac{1}{4}} \sum_{m\equiv n} q^{m(3m+1)+n(n+1)} \{\sin(6m+2n+2)u - \sin(6m-2n)u\}.$$

Hier schreibe man $m+n$ statt m, $m-n$ statt n:

$$\begin{aligned} &= q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} q^{4(m^2+mn+n^2)+2m} \{\sin(8m+4n+2)u - \sin(4m+8n)u\} \\ &= q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} q^{(2m+n)(2m+n+1)+n(3n-1)} \sin(8m+4n+2)u \\ &\qquad\qquad - q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} q^{(m+2n)^2+m(3m+2)} \sin(4m+8n)u. \end{aligned}$$

Setzt man in der ersten Summe m statt $m+n$, in der zweiten n statt $m+2n$, so erhält man wieder für $m \equiv n$ (mod. 2):

$$= q^{\frac{1}{4}} \sum_{m\equiv n} q^{m(m+1)+n(3n-1)} \sin(4m+2)u - q^{\frac{1}{4}} \sum_{m\equiv n} q^{m(3m+2)+n^2} \sin 4nu.$$

Die zweite Summe verschwindet (indem man n mit $-n$ vertauscht), während die erste Summe durch

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2} q^{\frac{1}{4}} \sum_{mn} (-1)^{m+n} q^{m(m+1)+n(3n-1)} \sin(4m+2)u \\ &= \tfrac{1}{2} q^{\frac{1}{4}} \sum (-1)^n q^{n(3n-1)} \sum (-1)^m q^{m(m+1)} \sin(4m+2)u \\ &= \tfrac{1}{2} q^{\frac{1}{4}} \chi_1 \vartheta_1(2u) \end{aligned}$$

ersetzt werden kann, wie sich ergiebt, wenn man für $m+1 \equiv n$, $-m$ statt $m+1$ substituirt.

Uebrigens genügen die vier *Kiepert*schen Functionen der Functionalgleichung:

$$X_\delta^\varepsilon(u) = \delta X(u+\pi) = \varepsilon q^3 e^{6ui} X(u+hi),$$

wo $\delta^2 = \varepsilon^2 = 1$, und sind die reellen Theile von:

$$\varepsilon i q^{\frac{1}{4}} e^{2ui}\, \Theta_\delta^\varepsilon(3u+hi,\ q^3).$$

Auch hat man

$$X_\delta^\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}} q^{-\frac{1}{12}} \left\{\Theta_\delta^\varepsilon\left(u-\frac{\pi}{3},\ q^{\frac{1}{3}}\right) - \Theta_\delta^\varepsilon\left(u+\frac{\pi}{3},\ q^{\frac{1}{3}}\right)\right\},$$

während

$$\Theta_\delta^\varepsilon(u) = \delta\,\Theta(u+\pi) = \varepsilon q e^{2ui}\, \Theta(u+hi).$$

Für $u = 0$ wird:

$$\vartheta_1' = 2q^{\frac{1}{4}} \chi_1^3 = \sqrt{\frac{4}{27}}\, \vartheta_1^3\left(\frac{\pi}{3},\ q^{\frac{1}{3}}\right) = 2qi\,\vartheta_1^3(hi,\ q^3).$$

Aus diesen Formeln erhellt die Beziehung der *Kiepert*schen Functionen zur Dreitheilung der elliptischen Thetafunctionen.

2.

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 27. April 1882 hat Herr *Weierstrass* S. 505 ein für die Sigmafunction fundamentales Theorem gegeben, welches nach Einführung von ϑ_1 statt σ in Gestalt der identischen Gleichung

$$\vartheta_1(u+u_1)\vartheta_1(u-u_1)\vartheta_1(u_2+u_3)\vartheta_1(u_2-u_3)+\vartheta_1(u+u_2)\vartheta_1(u-u_2)\vartheta_1(u_3+u_1)\vartheta_1(u_3-u_1)$$
$$+\vartheta_1(u+u_3)\vartheta_1(u-u_3)\vartheta_1(u_1+u_2)\vartheta_1(u_1-u_2)=0$$

geschrieben werden kann. Herr *Weierstrass* bemerkt, dass diese Gleichung, welche nur ϑ_1 enthält, wesentlich anderer Art sei, wie die von *Jacobi* entdeckten und Bd. I, S. 507 seiner gesammelten Werke vollständig aufgestellten Relationen unter Producten von je vier Thetafunctionen, weil daselbst zwei oder mehrere Thetafunctionen vorkommen. Da jedoch nicht allein, wie Herr *Weierstrass* angiebt, die *Jacobi*schen Gleichungen aus der *Weierstrass*schen Formel sich ableiten lassen, sondern umgekehrt auch diese aus jenen, so scheinen mir beiderlei Formeln in gewissem Sinne äquivalent zu sein *).

Um die *Weierstrass*sche Formel zu erhalten, gehen wir von den Gleichungen $A(2,4)$ S. 507 aus, welche wir in der Abkürzung

$$\Pi_3-\Pi_2=\Pi'+\Pi_1',\quad \Pi-\Pi_1=\Pi'-\Pi_1',$$

also:

$$2\Pi_1'=-\Pi+\Pi_1-\Pi_2+\Pi_3$$

schreiben wollen. Hier ist z. B.

$$\Pi_1'=\vartheta_1 w'\vartheta_1 x'\vartheta_1 y'\vartheta_1 z',\quad \Pi=\vartheta w\vartheta x\vartheta y\vartheta z,$$

während

$$2w'=w+x+y+z,\quad 2y'=w-x+y-z,$$
$$2x'=w+x-y-z,\quad 2z'=w-x-y+z.$$

Die Reciprocität dieser Ausdrücke ist bekannt. Durch Umkehr des Vorzeichens von z geht analog das reciproke System hervor:

---

*) Auch dürfte die *Borchardt*sche Zusammenstellung l. c. nicht ganz *vollständig* sein, wie bereits in den Berichten der Leipziger Gesellsch. d. Wiss. vom 1. Juli 1859, S. 160 angedeutet ist. Ich ziehe desshalb vor, die *Jacobi*schen Relationen, ähnlich wie *Rosenhain* in seiner Preisschrift S. 375, in der Form der in meiner Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale Art. 50 zusammengestellten *fünf* Gruppen von Formelquaternionen zu betrachten.

$$2w'' = w+x+y-z, \quad 2y'' = w-x+y+z,$$
$$2x'' = w+x-y+z, \quad 2z'' = -w+x+y+z$$

nebst der entsprechenden Gleichung

$$2\Pi_1'' = \Pi+\Pi_1+\Pi_2-\Pi_3.$$

Durch Addition folgt sofort die *Weierstrass*sche Formel

$$\Pi_1 = \Pi_1'+\Pi_1''.$$

Zur directen Ableitung der Formel führt am einfachsten der folgende Weg. Die Multiplication der Reihen giebt leicht:

$$\vartheta_1(u,q)\vartheta_1(v,q) = \vartheta_3(u+v)\vartheta_2(u-v)-\vartheta_2(u+v)\vartheta_3(u-v) \quad (\text{mod. } q^2)$$

nebst

$$(\text{mod. } q) \quad \left.\begin{aligned} \vartheta_2 u\vartheta_2 v &= \vartheta_3(u+v)\vartheta_2(u-v)+\vartheta_2(u+v)\vartheta_3(u-v) \\ \vartheta u\,\vartheta v &= \vartheta_3(u+v)\vartheta_3(u-v)-\vartheta_2(u+v)\vartheta_2(u-v) \\ \vartheta_3 u\vartheta_3 v &= \vartheta_3(u+v)\vartheta_3(u-v)+\vartheta_2(u+v)\vartheta_2(u-v) \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } q^2),$$

folglich:

$$\Pi_1(q) =$$
$$\{\vartheta_3(w+x)\vartheta_2(w-x)-\vartheta_2(w+x)\vartheta_3(w-x)\}\{\vartheta_3(y+z)\vartheta_2(y-z)-\vartheta_2(y+z)\vartheta_3(y-z)\}$$

rechts mit dem Modul q^2. Die Producte der Thetafunctionen mit den Argumenten $w+x$ und $y+z$, sowie $w-x$ und $y-z$, braucht man bloss vom mod. q^2 auf den mod. q zurückzuführen, um die Gleichung

$$2\Pi_1 = -\Pi'+\Pi_1'-\Pi_2'+\Pi_3'$$

zu erhalten. Die coordinirte Gleichung

$$2\Pi_1 = \Pi''+\Pi_1''+\Pi_2''-\Pi_3''$$

geht hervor, wenn man die Argumente $w+x$ und $y-z$, sowie $w-x$ und $y+z$ verbindet. Die Addition der reciproken Gleichungen liefert wie oben die *Weierstrass*sche Formel.

[illegible] Thetaformeln.

[illegible]

[illegible]

[illegible] ganzen Zahlen [illegible] von $-\infty$ bis $+\infty$ zu er[illegible] man zur Abkürzung das Product:

[illegible]

[illegible] $T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ [illegible] eindeutige Functionen der vier [illegible] Permutationen der durch die Function:

[illegible]

[illegible] ungeändert bleiben und daher bei den 24 Permu[illegible] verschiedene conjugirte Werthe annehmen.

[illegible] werden gemäss ihrer Definition als [illegible]

$$[illegible] -m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3)\pi i$$

[illegible] ganzzahligen Werthe von m_0, m_1, [illegible] beiden Bedingungen:

$$[illegible] \pmod{2},$$

[illegible] Bedingung:

$$[illegible] \equiv 1 \pmod{2}$$

[illegible] kann weggelassen werden, wenn unter [illegible] Factor

$$[illegible]$$

und vor dem Summenzeichen der Factor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt wird. Nun geht offenbar jede mehrfach unendliche Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, \ldots} C_{m_0, m_1, m_2, \ldots} F(m_0\zeta_0,\ m_1\zeta_1,\ m_2\zeta_2,\ \ldots) \qquad (m_0, m_1, m_2, \ldots = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ in inf.}),$$

in welcher F eine *symmetrische* Function der Argumente bedeutet, bei der Vertauschung von ζ_0 und ζ_1 in die Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, \ldots} C_{m_1, m_0, m_2, \ldots} F(m_0\zeta_0,\ m_1\zeta_1,\ m_2\zeta_2,\ \ldots) \qquad (m_0, m_1, m_2, \ldots = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ in inf.})$$

über, da ja gleichzeitig die Summationsbuchstaben m_0 und m_1 vertauscht werden können. Man erhält daher die beiden conjugirten Werthe von T_h, welche mit T'_h und T''_h bezeichnet werden mögen, und welche durch die Gleichungen:

$$T'_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = T_h(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1), \quad T''_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = T_h(\zeta_0, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2)$$

bestimmt sind, wenn man bei dem Summenausdruck $(A.)$ nur im Exponenten von -1 und in den beiden Summationsbedingungen die drei Summationsbuchstaben m_1, m_2, m_3 cyklisch permutirt.

2. Bei der mit $(A.)$ bezeichneten Darstellung der Functionen T_h tritt zuvörderst der Satz in Evidenz,

I. dass $T_2 + T_3$ eine *symmetrische* Function der vier Grössen ζ ist; denn $T_2 + T_3$ wird gleich dem Werthe der vierfach unendlichen Reihe:

$$(B.) \qquad \sum q^{\frac{1}{2}(m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)} e^{2(m_0\zeta_0 + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3)\pi i},$$

wenn nur die Summationsbedingung:

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \equiv 0 \pmod{2}$$

festgehalten wird, und diese Bedingung bleibt bei allen Permutationen der vier Summationsbuchstaben m ungeändert, folglich auch der Werth der Reihe bei allen Permutationen der vier Grössen ζ.

Wenn man ferner den Werth der Reihe $(B.)$ bei der Summationsbedingung:

$$(C.) \qquad (m_0+m_1)(m_2+m_3)(m_0+m_3)(m_1+m_2) \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{mit} \quad R,$$

bei der Summationsbedingung:

$$(C'.) \qquad (m_0+m_2)(m_1+m_3)(m_0+m_1)(m_2+m_3) \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{mit} \quad R',$$

bei der Summationsbedingung:

$$(C''.) \qquad (m_0+m_3)(m_1+m_2)(m_0+m_2)(m_1+m_3) \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{mit} \quad R''$$

bezeichnet, so ist:

$$R' = R(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1), \quad R'' = R(\zeta_0, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2),$$

und da bei allen Permutationen der Summationsbuchstaben m_0, m_1, m_2, m_3 die drei Bedingungen $(C.)$, $(C'.)$, $(C''.)$ nur *in einander* übergehen, so sind es auch nur die drei conjugirten Werthe R, R', R'', welche die Function $R(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ bei irgend welchen Permutationen der Grössen ζ annehmen kann.

Gemäss der mit $(A.)$ bezeichneten Darstellung von T_h wird nun:

$$(D.) \qquad T_1 = R - R', \quad \text{und folglich} \quad T_1' = R' - R'', \quad T_1'' = R'' - R;$$

es tritt daher bei jener Darstellung auch der Satz,

II. dass die Summe der drei conjugirten Werthe von T_1 gleich Null ist,

in vollkommene Evidenz.

3. Jener erste Satz, dass $T_2 + T_3$ eine symmetrische Function der vier Grössen ζ ist, besagt nichts Anderes als die berühmte *Jacobi*sche Thetaformel, welche das Fundament der vor einem halben Jahrhundert von *Jacobi* in Königsberg gehaltenen und durch die Ausarbeitungen seiner Schüler seit langer Zeit in weiteren Kreisen verbreiteten Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen bildete. Denn aus der Gleichung:

$$(E.) \qquad T_2 + T_3 = T_2' + T_3'$$

oder:

$$T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = T_2(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3),$$

welche ausdrückt, dass die conjugirten Werthe der Function $T_2 + T_3$ einander gleich sind, geht die *Jacobi*sche Formel in der Gestalt, wie sie sich auf S. 506 des ersten Bandes von *Jacobi*s gesammelten Werken unter No. 11 angegeben findet, hervor, wenn man:

$$2\zeta_0\pi = w + x, \quad 2\zeta_1\pi = w - x, \quad 2\zeta_2\pi = y + z, \quad 2\zeta_3\pi = y - z$$

setzt. Andererseits folgt aber auch aus der Gleichung $T_2 + T_3 = T_2' + T_3'$, dass $T_2 + T_3$ eine symmetrische Function der Grössen ζ ist.

Der zweite Satz wird durch die Formel:

$$(F.) \qquad T_1 + T_1' + T_1'' = 0$$

oder:

$$T_1(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + T_1(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1) + T_1(\zeta_0, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2) = 0$$

ausgedrückt. Sie ist nichts Anderes als jene schon vor 25 Jahren von Herrn *Weierstrass* gefundene und in seinen Vorlesungen mitgetheilte Formel *), und sie wird mit der Formel (I.) des VII. Buches der „Théorie des

*) Vgl. die *Weierstrass*sche Abhandlung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften 1882. I. S. 505.

fonctions elliptiques" von *Briot* und *Bouquet* *), welche dort als Fundamentalformel bezeichnet wird, identisch, wenn:

$$2\zeta_0 = a-b, \quad 2\zeta_1 = 2x+a+b, \quad 2\zeta_2 = 2y+a+b, \quad 2\zeta_3 = 2z+a+b$$

gesetzt wird. In Herrn *Halphens* „Traité des fonctions elliptiques" wird die Formel ($F.$) als „die dreigliedrige Gleichung" (équation à trois termes) bezeichnet, und sie ist schon dort auf S. 244 bis 246 durch directe Multiplication der vier ϑ-Reihen bewiesen worden.

4. Ebenso wie die Formel ($D.$): $T_1 = R-R'$ ergeben sich die Formeln:

$$T_2 = R+R', \quad -T_0+T_3 = 2R''$$

unmittelbar aus der mit ($A.$) bezeichneten Darstellung der Functionen T. Aus derselben resultirt ferner, dass T_0+T_3 durch die Reihe ($B.$) dargestellt wird, wenn man die Summation auf alle diejenigen Werthsysteme m_0, m_1, m_2, m_3 beschränkt, bei welchen alle vier Zahlen zugleich grade oder zugleich ungrade sind, und daraus dass diese Summationsbedingung in Beziehung auf die vier Zahlen m symmetrisch ist, folgt unmittelbar, dass T_0+T_3 eine symmetrische Function der vier Grössen ζ ist. Bezeichnet man dieselbe mit S, so werden die vier Functionen T durch die vier Functionen R, R', R'', S in folgender Weise ausgedrückt:

$$(G.) \qquad T_0 = S-R'', \quad T_1 = R-R', \quad T_2 = R+R', \quad T_3 = S+R'',$$

und die vier Functionen $R, R', R'', S,$ welche sich hier als geeignete Elemente zur Herleitung der Thetaformeln erweisen, werden sämmtlich durch die Reihe ($B.$) dargestellt, nur dass:

für R entweder $m_0 \equiv 0,\ m_1 \equiv 1,\ m_2 \equiv 0,\ m_3 \equiv 1,$
oder $m_0 \equiv 1,\ m_1 \equiv 0,\ m_2 \equiv 1,\ m_3 \equiv 0,$
für R' entweder $m_0 \equiv 0,\ m_1 \equiv 1,\ m_2 \equiv 1,\ m_3 \equiv 0,$
oder $m_0 \equiv 1,\ m_1 \equiv 0,\ m_2 \equiv 0,\ m_3 \equiv 1,$
für R'' entweder $m_0 \equiv 0,\ m_1 \equiv 0,\ m_2 \equiv 1,\ m_3 \equiv 1,$
oder $m_0 \equiv 1,\ m_1 \equiv 1,\ m_2 \equiv 0,\ m_3 \equiv 0,$
für S entweder $m_0 \equiv 0,\ m_1 \equiv 0,\ m_2 \equiv 0,\ m_3 \equiv 0,$
oder $m_0 \equiv 1,\ m_1 \equiv 1,\ m_2 \equiv 1,\ m_3 \equiv 1$

nach dem Modul 2 sein muss.

*) Deuxième édition. Paris 1875. S. 486.

Der Inhalt der Grundgleichungen ($G.$) kann in folgendem Satze formulirt werden:

(III.) die Function T_0+T_3 ist eine symmetrische Function von $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, und die drei Functionen: $T_1+T_2,\ -T_1+T_2,\ -T_0+T_3$ sind mit einander conjugirt und gehören beziehungsweise den durch die Functionen: $\zeta_0\zeta_2+\zeta_1\zeta_3,\ \zeta_0\zeta\ +\zeta_1\zeta_2,\ \zeta_0\zeta_1+\zeta_2\zeta_3$ repräsentirten Gattungen an.

Aus diesem Satze gehen wiederum die Gleichungen ($G.$) hervor, wenn man die symmetrische Function T_0+T_3 mit S und die Function T_1+T_2 mit $2R$, also dann $-T_1+T_2$ mit $2R'$ und $-T_0+T_3$ mit $2R''$ bezeichnet.

Mit Hülfe der Grundgleichungen ($G.$) oder des Satzes (III.) erkennt man unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Summen und Differenzen je zweier Functionen T:

$T_0+T_3,\quad T_0-T_2,\quad T_2+T_3$ sind symmetrische Functionen,

$T_0+T_1,\quad T_1+T_2,\quad -T_1+T_3$ sind Functionen der Gattung $\zeta_0\zeta_2+\zeta_1\zeta_3$,

$T_0-T_1,\quad -T_1+T_2,\quad T_1+T_3$ sind Functionen der Gattung $\zeta_0\zeta_3+\zeta_1\zeta_2$,

$-T_2+T_3,\quad -T_0+T_3,\quad T_0+T_2$ sind Functionen der Gattung $\zeta_0\zeta_1+\zeta_2\zeta_3$,

und je drei in derselben Columne stehende Functionen der letzten drei Zeilen sind mit einander conjugirt.

Der Satz (III.) schliesst den Inhalt der mit (I.) und (II.) bezeichneten beiden Sätze ein, und

es gehen überhaupt die sämmtlichen Relationen, welche zwischen den Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 und ihren conjugirten bestehen, aus ***additiven*** Verbindungen der Grundgleichungen ($G.$) und der mit ihnen „conjugirten" Gleichungen hervor, nämlich in ***der*** Weise, dass jene Relationen ***identisch*** erfüllt sind, wenn darin für die Functionen T ihre Ausdrücke durch die Functionen R, R', R'', S substituirt werden; alle Relationen zwischen den zwölf Functionen

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3),\quad T_h(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_1),\quad T_h(\zeta_0, \zeta_3, \zeta_1, \zeta_2)\qquad (h=0,1,2,3)$$

entspringen somit nur ***daraus***, dass diese zwölf Functionen sämmtlich gemäss den Gleichungen ($G.$) als lineare Verbindungen der vier Functionen R, R', R'', S darstellbar sind.

Der Satz (III.) oder das System der Gleichungen:

$$T_0^{(k)} = S - R^{(k-1)},\quad T_1^{(k)} = R^{(k)} - R^{(k+1)},\quad T_2^{(k)} = R^{(k)} + R^{(k+1)},\quad T_3^{(k)} = S + R^{(k-1)},$$

wo $k = 0, 1, 2$ (mod. 3) zu nehmen und $T_h^{(0)} = T_h$, $T_h^{(1)} = T'_h$, $T_h^{(2)} = T''_h$ zu setzen ist, kann hiernach als das einfachste ausreichende Fundament aller jener Relationen angesehen werden.

5. Substituirt man in der vierfach unendlichen Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} C_{m_0, m_1, m_2, m_3}\, q^{\frac{1}{2}(m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2)} e^{2(m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+m_3\zeta_3)\pi i}$$

für ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 beziehungsweise:

$$\zeta_0+\tfrac{1}{2}(r_0 w+s_0),\quad \zeta_1+\tfrac{1}{2}(r_1 w+s_1),\quad \zeta_2+\tfrac{1}{2}(r_2 w+s_2),\quad \zeta_3+\tfrac{1}{2}(r_3 w+s_3),$$

wo r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3 irgend welche ganzen Zahlen bedeuten und w durch die Gleichung $e^{w\pi i} = q$ bestimmt ist, so resultirt die Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} (-1)^{m_0 s_0+m_1 s_1+m_2 s_2+m_3 s_3} C_{m_0-r_0, m_1-r_1, m_2-r_2, m_3-r_3}$$
$$\times q^{\frac{1}{2}(m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2)} e^{2(m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+m_3\zeta_3)\pi i},$$

multiplicirt mit dem Factor:

$$(-1)^{r_0 s_0+r_1 s_1+r_2 s_2+r_3 s_3} q^{-\frac{1}{2}(r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2)} e^{-2(r_0\zeta_0+r_1\zeta_1+r_2\zeta_2+r_3\zeta_3)\pi i}.$$

Hieraus folgt, dass die Functionen:

$$T_0,\quad T_1,\quad T_2,\quad T_3$$

beziehungsweise in:

$$T_3,\quad T_2,\quad T_1,\quad T_0$$

übergehen, wenn man:

$$\zeta_0+\tfrac{1}{2} \text{ für } \zeta_0 \quad\text{und}\quad \zeta_2+\tfrac{1}{2} \text{ für } \zeta_2$$

setzt, und dass sie, wenn:

$$\zeta_0+\tfrac{1}{2}w \text{ für } \zeta_0 \quad\text{und}\quad \zeta_2+\tfrac{1}{2}w \text{ für } \zeta_2$$

substituirt wird, beziehungsweise in:

$$T_1,\quad T_0,\quad T_3,\quad T_2,$$

multiplicirt mit dem Factor $q^{-1}e^{-2(\zeta_0+\zeta_2)\pi i}$ transformirt werden.

Es ergiebt sich ferner, dass die mit (B.) bezeichnete vierfach unendliche Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} q^{\frac{1}{2}(m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2)} e^{2(m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+m_3\zeta_3)\pi i},$$

mit den Summations-Bedingungen:

$$m_0 \equiv t_0, \quad m_1 \equiv t_1, \quad m_2 \equiv t_2, \quad m_3 \equiv t_3 \pmod{2},$$

wenn

$$\zeta_k + \tfrac{1}{2}(r_k w + s_k) \quad \text{für} \quad \zeta_k \qquad (k=0,1,2,3)$$

substituirt wird, wiederum in eine Reihe ($B.$) mit den Summationsbedingungen:

$$m_0 \equiv r_0+t_0, \quad m_1 \equiv r_1+t_1, \quad m_2 \equiv r_2+t_2, \quad m_3 \equiv r_3+t_3 \pmod{2}$$

übergeht, dabei aber die Grösse:

$$(-1)^{(r_0+t_0)s_0+(r_1+t_1)s_1+(r_2+t_2)s_2+(r_3+t_3)s_3} q^{-\frac{1}{2}(r_0^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2)} \\ \times e^{-2(r_0\zeta_0+r_1\zeta_1+r_2\zeta_2+r_3\zeta_3)\pi i}$$

als Factor hinzutritt. Die 16 Reihen ($B.$), welche den 16 möglichen Werthsystemen:

$$t_0 \equiv 0,\ 1; \quad t_1 \equiv 0,\ 1; \quad t_2 \equiv 0,\ 1; \quad t_3 \equiv 0,\ 1 \pmod{2}$$

entsprechen, gehen also bei allen jenen Substitutionen, abgesehen von dem angegebenen Factor, nur in einander über. Sie gehen ferner auch bei jeder Vertauschung von zwei Grössen ζ nur in einander über, da z. B. bei der Vertauschung von ζ_0 mit ζ_1 nur das Werthsystem (t_0, t_1, t_2, t_3) in (t_1, t_0, t_2, t_3) übergeht. Da nun jede der Functionen R, R', R'', S die Summe zweier Reihen ($B.$) mit zwei zugehörigen Werthsystemen (t_0, t_1, t_2, t_3), und jede der Functionen T_0, T_1, T_2, T_3 die Summe oder Differenz von je zwei Functionen R, R', R'', S ist, so ist jede der Functionen T ein Aggregat von vier Reihen ($B.$) mit vier zugehörigen Werthsystemen (t_0, t_1, t_2, t_3), und es ist folglich auch jede derjenigen Functionen von $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ein solches Aggregat, welche aus T_0, T_1, T_2, T_3 hervorgehen, wenn man

$$\zeta_k + \tfrac{1}{2}(r_k w + s_k) \quad \text{für} \quad \zeta_k \qquad (k=0,1,2,3)$$

substituirt, oder wenn man die vier Grössen ζ in irgend einer Weise mit einander permutirt. Bei Benutzung der Ausdrücke aller auf diese Weise gebildeten Functionen von $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ durch die 16 Reihen ($B.$) werden die sämmtlichen Relationen, welche zwischen diesen Functionen bestehen, zu Identitäten.

So entsteht aus der mit $\frac{1}{2}(T_0+T_3)$ identischen Function S, welche

das Aggregat zweier Reihen ($B.$) mit den Werthsystemen:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0; \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 1$$

ist, durch Hinzufügung von $\frac{1}{2}w$ zu ζ_2, eine Reihe ($B.$) mit den Werthsystemen:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 0; \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1,$$

und durch Hinzufügung von $\frac{1}{2}w$ zu ζ_3, eine Reihe ($B.$) mit den Werthsystemen:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1; \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 0.$$

Dadurch geht aber die Function $T_0 + T_3$ in die Function:

$$\vartheta_3(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_3(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_2(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_2(\zeta_2-\zeta_3) \pm \vartheta_0(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_0(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3)$$

abgesehen von einem Factor über, und hierbei ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $\frac{1}{2}w$ zu ζ_3 oder zu ζ_2 hinzugefügt war. Die hier erlangte Darstellung jener beiden Aggregate von Thetaproducten durch die Reihen ($B.$) setzt es nun in Evidenz, dass die ***Summe*** der beiden Thetaproducte in Beziehung auf $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$, die ***Differenz*** aber in Beziehung auf $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_3$ symmetrisch ist, und die Gleichsetzung zweier durch Permutation der Grössen ζ entstehenden Ausdrücke führt zu den ***Jacobi***schen Formeln, welche auf S. 507 des I. Bandes von ***Jacobi***s Werken bei ($A.$) No. 9 und 10 angegeben sind.

6. Bezeichnet man die Reihe ($B.$) bei den Summationsbedingungen $m_k \equiv t_k$ (mod. 2), welche auch als Product von vier Thetafunctionen:

$$\vartheta_{3-t_0}(2\zeta_0, q^2)\vartheta_{3-t_1}(2\zeta_1, q^2)\vartheta_{3-t_2}(2\zeta_2, q^2)\vartheta_{3-t_3}(2\zeta_3, q^2)$$

dargestellt werden kann, mit: $B(t_0, t_1, t_2, t_3)$, so sind es nach obigen Entwickelungen die 16 den verschiedenen Werthsystemen $t = 0, 1$ entsprechenden Reihen $B(t_0, t_1, t_2, t_3)$, durch deren Einführung die a. a. O. mit No. 1 bis 10 bezeichneten ***Jacobi***schen Thetaformeln als Identitäten erkannt werden. Dies resultirt aber auch ***direct,*** da man, ausgehend von der Definition:

$$\vartheta_h(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} i^{ne_h} q^{\frac{1}{4}n^2} e^{n\zeta\pi i} \qquad \left(\begin{matrix} n \equiv \frac{1}{2}h(h+1) \\ e_h \equiv \frac{1}{2}h(h-1)-1 \end{matrix} \pmod{2} \right),$$

für $\vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_k(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_k(\zeta_2-\zeta_3)$ unmittelbar die vierfach unendliche Reihe:

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} (-1)^{m_0 e_h + m_2 e_k} q^{\frac{1}{2}(m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2)} e^{2(m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+m_3\zeta_3)\pi i}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$m_0+m_1 \equiv \tfrac{1}{2}h(h+1), \quad m_2+m_3 \equiv \tfrac{1}{2}k(k+1) \pmod{2}$$

erhält. Hiernach wird:

$$\vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_k(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_k(\zeta_2-\zeta_3)$$
$$= \sum_{\delta,\delta'}(-1)^{\delta\varepsilon_h+\delta'\varepsilon_k}B(\delta,\ \delta+\tfrac{1}{2}h(h+1),\ \delta',\ \delta'+\tfrac{1}{2}k(k+1)),$$

wo die Summation auf die vier Werthsysteme: $\delta = 0, 1$; $\delta' = 0, 1$ zu erstrecken ist. Dieses Aggregat von vier Reihen $(B.)$ ist

für $h = 0,\ k = 0 : B(0000)+B(1111)-B(0011)-B(1100)$,
für $h = 0,\ k = 1 : B(0001)+B(1110)-B(0010)-B(1101)$,
für $h = 0,\ k = 2 : B(0001)+B(0010)-B(1101)-B(1110)$,
für $h = 0,\ k = 3 : B(0000)+B(0011)-B(1100)-B(1111)$,
für $h = 1,\ k = 1 : B(0101)+B(1010)-B(0110)-B(1001)$,
für $h = 1,\ k = 2 : B(0101)+B(0110)-B(1001)-B(1010)$,
für $h = 1,\ k = 3 : B(0100)+B(0111)-B(1000)-B(1011)$,
für $h = 2,\ k = 2 : B(0101)+B(0110)+B(1001)+B(1010)$,
für $h = 2,\ k = 3 : B(0100)+B(0111)+B(1000)+B(1011)$,
für $h = 3,\ k = 3 : B(0000)+B(0011)+B(1100)+B(1111)$,

und wie sich bei Einsetzung dieser Ausdrücke die *Jacobi*schen Formeln gestalten, möge an einem Beispiel gezeigt werden.

In der *Jacobi*schen, a. a. O. mit No. 7 bezeichneten Thetaformel ist der Ausdruck auf der linken Seite die Summe der beiden, den Werthsystemen $h = 0,\ k = 2$ und $h = 1,\ k = 3$ entsprechenden Thetaproducte, also gleich:

$$B(0001)+B(0010)+B(0100)+B(0111)-B(1110)-(B1101)-B(1011)-B(1000).$$

Dieses Aggregat von Reihen $B(t_0, t_1, t_2, t_3)$ ist offenbar in Beziehung auf t_1, t_2, t_3 symmetrisch, und die hierdurch dargestellte Function von $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ist deshalb in Beziehung auf $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ symmetrisch. Der Ausdruck auf der rechten Seite jener *Jacobi*schen Thetaformel entsteht aber aus demjenigen auf der linken Seite durch Vertauschung von ζ_1 und ζ_2, und er ist daher mit demselben identisch.

7. Herr *Scheibner* hat gezeigt *), wie aus der *Jacobi*schen Funda-

*) Vgl. S. 258 dieses Bandes.

mentalgleichung:

$$T_2+T_3 = T'_2+T'_3$$

die *Weierstrass*sche Formel:

$$T_1+T'_1+T''_1 = 0$$

erhalten werden kann. Die bezügliche Deduction lässt sich bei den hier gebrauchten Bezeichnungen dahin fassen, dass die *Jacobi*sche Gleichung, wenn man darin die Argumente ζ_0 und ζ_2 um $\frac{1}{2}$ vermehrt, in die Gleichung:

$$T_0+T_1 = -T'_2+T'_3$$

übergeht, welche bei Vertauschung von ζ_2 und ζ_3 die fernere Relation:

$$T_0-T_1 = -T''_2+T''_3$$

ergiebt, und dass daher T_1 sich als Differenz zweier conjugirten Werthe einer dreiwerthigen Function von ζ_0, ζ_1, ζ_2, ζ_3 darstellen lässt.

Dass andererseits auch die *Jacobi*sche Formel aus der *Weierstrass*schen abgeleitet werden kann, ist schon in dem oben angeführten Werke von *Briot* und *Bouquet* dargelegt worden *), und es zeigt sich unmittelbar, wenn man die drei Gleichungen:

$$T_1+T'_1+T''_1 = 0, \quad T_2-T'_1-T'_2 = 0, \quad T_3+T'_1-T'_3 = 0$$

zu einander addirt, von denen die zweite aus der ersten hervorgeht, indem ζ_0 und ζ_2 um $\frac{1}{2}$ vermehrt wird, die dritte aus der zweiten, indem $\frac{\log q}{2\pi i}$ zu ζ_0 und ζ_2 hinzugefügt wird (vgl. die Ausführungen in No. 5).

8. In der Abhandlung: „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales" hat *Jacobi* unter No. 12 **) eine Formel entwickelt, welche bei Anwendung der obigen Bezeichnungen folgendermassen lautet:

$$(H.) \qquad \frac{T_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)+T_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)}{T_0(\zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} = 1,$$

und welche aus jener schon in No. 2 citirten *Jacobi*schen Thetarelation *(E.)*:

$$T_2(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3)+T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) = T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)+T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

---

*) Vgl. *Briot* und *Bouquet*, Théorie des fonctions elliptiques. Deuxième édition. Paris 1875. S. 495 sqq.

**) Band XV, S. 203 dieses Journals und Band I, S. 340 von *Jacobis* gesammelten Werken.

hervorgeht, wenn man $\zeta_0 = \zeta_1 + \frac{1}{2}(1+w)$ setzt. Für *Jacobi* bildete die speciellere Formel (*H.*) gewiss eine nützliche Vorstufe bei der ***Auffindung*** jener allgemeineren, welche ihm nachher als Fundament für seine Vorlesungen über elliptische Functionen diente*); merkwürdiger Weise bildet aber auch die speciellere Formel (*H.*) eine nothwendige Vorstufe bei der ***Herleitung*** der allgemeineren, wenn man, anstatt von den Theta-***Reihen*** auszugehen, die Entwickelung der Thetafunctionen in unendliche ***Producte*** zu Grunde legt.

Um diese Herleitung auseinanderzusetzen, betrachte ich zuvörderst den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (*H.*) als Function von $e^{\zeta_2 \pi i}$. Die Productentwickelung der Functionen T lässt nun unmittelbar erkennen, dass, wenn $q e^{\zeta_2 \pi i}$ an die Stelle von $e^{\zeta_2 \pi i}$ gesetzt wird, im Zähler und Nenner jenes Ausdrucks nur derselbe Factor hinzutritt, der Ausdruck selbst also ungeändert bleibt. Zur Ermittelung seines Werthes kann man sich demnach auf diejenigen Werthe des Argumentes $e^{\zeta_2 \pi i}$ beschränken, welche in dem Ring-Gebiete zwischen den beiden Kreisen mit den Radien $|q|$ und 1 liegen. In diesem Gebiete liegen, wie ebenfalls durch die Productentwickelung der Functionen T evident wird, nur zwei Werthe von $e^{\zeta_2 \pi i}$, für welche der Nenner $T_0(\zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ gleich Null wird, und zwar von der ersten Ordnung. Diese beiden Werthe sind durch die Gleichungen:

$$\zeta_2 = \zeta_3 + \tfrac{1}{2}\mu w, \quad \zeta_2 = -\zeta_3 + \tfrac{1}{2}\nu w$$

bestimmt, in welchen μ und ν ungerade Zahlen bedeuten. Für diese beiden Werthe von ζ_2 werden aber die beiden Functionen T_0 und T_1 im Zähler des Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung (*H.*) einander entgegengesetzt gleich. Der Ausdruck selbst bleibt daher für alle Werthe von $e^{\zeta_2 \pi i}$ endlich, er hat also nach dem *Cauchy*schen Satze einen von ζ_2 unabhängigen Werth, und aus der Annahme $\zeta_2 = \zeta_1$ ergiebt sich sofort, dass dieser Werth gleich 1 ist.

Nachdem somit die Richtigkeit der specielleren *Jacobi*schen Formel (*H.*) dargethan ist, betrachte ich zur Herleitung der allgemeineren mit (*E.*) bezeichneten Formel den Quotienten:

$$(K.) \qquad \frac{T_2(\zeta_3, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_0) + T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) - T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)},$$

*) Vgl. die Bemerkung 3. S. 262.

dessen Werth sich gleich 1 erweisen soll, als Function von $e^{\zeta_0 \pi i}$. Man sieht nun zuvörderst wieder, dass der Werth des Quotienten ungeändert bleibt, wenn $qe^{\zeta_0 \pi i}$ an die Stelle von $e^{\zeta_0 \pi i}$ gesetzt wird, dass man sich also auf diejenigen Werthe beschränken kann, deren absoluter Betrag zwischen $|q|$ und 1 liegt. Unter diesen giebt es aber nur zwei, durch Gleichungen:

$$\zeta_0 = \zeta_1 + \tfrac{1}{2}\mu(1+w), \quad \zeta_0 = -\zeta_1 + \tfrac{1}{2}\nu(1+w) \qquad (\mu,\ \nu \text{ ungerade})$$

bestimmte Werthe von $e^{\zeta_0 \pi i}$, für welche der Nenner T_3 gleich Null wird, und zwar von der ersten Ordnung; und für eben diese Werthe wird der Zähler, abgesehen von einem Factor, durch den Ausdruck:

$$T_0(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) + T_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) - T_0(\zeta_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

dargestellt, welcher gemäss eben jener specielleren *Jacobi*schen Formel (*H.*) verschwindet. Vermöge dieser Formel erkennt man also, dass der Werth von (*K.*) für alle Werthe von ζ_0 endlich und daher von ζ_0 unabhängig ist. Setzt man nunmehr $\zeta_0 = \zeta_1 + \frac{1}{2}$, so wird der Ausdruck (*K.*) mit dem Ausdrucke auf der linken Seite der Gleichung (*H.*) übereinstimmend und erweist sich also in der That gleich *Eins.*

9. Während sich in der von den Theta-*Reihen* ausgehenden Entwickelung die *Jacobi*sche Thetaformel noch unmittelbarer als die *Weierstrass*sche ergiebt, gestaltet sich bei dieser letzteren, vermöge desjenigen Vorzugs, welcher in der oben erwähnten*) Bezeichnung als „*dreigliedrige* Gleichung" hervorgehoben ist, die Herleitung aus der *Product*-Entwickelung der Thetafunctionen wesentlich einfacher.

Betrachtet man nämlich den Quotienten

$$\frac{T_1(\zeta_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_0) - T_1(\zeta_3, \zeta_0, \zeta_2, \zeta_1)}{T_1(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)},$$

dessen Werth sich gleich 1 erweisen soll, als Function von $e^{\zeta_0 \pi i}$, so zeigt sich zuvörderst wie oben, dass sein Werth sich nicht ändert, wenn man dem Argumente $e^{\zeta_0 \pi i}$ den Factor q hinzufügt, dass man sich also auf diejenigen Argumente beschränken kann, deren absoluter Betrag zwischen $|\sqrt{q}|$ und $|\sqrt{q^{-1}}|$ liegt. Nun sind die Argumente, für welche der Nenner gleich Null wird, durch die Bedingungen:

$$\zeta_0 = \zeta_1 + rw, \quad \zeta_0 = -\zeta_1 + sw$$

*) Vgl. den Schlusssatz in No. 3.

gegeben, in welchen r und s ganze Zahlen bedeuten, und die Werthe des Quotienten sind für diese Argumente beziehungsweise dieselben wie für $\zeta_0 = \zeta_1$ und $\zeta_0 = -\zeta_1$. Hierfür wird aber nicht nur der Nenner Null, und zwar von der ersten Ordnung, sondern auch der Zähler. Jener Quotient bleibt also für alle Werthe von ζ_0 endlich, und sein demgemäss von ζ_0 unabhängiger Werth erweist sich, wenn man $\zeta_0 = \zeta_3$ setzt, in der That gleich *Eins*.

Berlin, 1887.

Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

In seiner grundlegenden Arbeit „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme" (dieses Journal Bd. 57) hat Herr *E. E. Kummer* die zweifach unendlichen Schaaren gerader Linien mit denjenigen Hülfsmitteln untersucht, welche die Theorie der krummen Oberflächen liefert, und damit der Theorie der Strahlensysteme den ihr zukommenden Platz angewiesen. Wenn in der vorliegenden Abhandlung derselbe Gegenstand dennoch noch einmal aufgenommen worden ist, so sind hierfür hauptsächlich zwei Gründe massgebend gewesen.

Einmal ist es mir bei eingehenderem Studium dieser Theorie gelungen, Methoden zu finden, mit deren Hülfe man die a. a. O. gefundenen eleganten Resultate fast ohne alle Rechnung ablesen kann. Die ganze Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel lässt sich nämlich auf die Untersuchung zweier quadratischen Differentialformen zurückführen. Stellt man aber diese Formen mit Hülfe einer simultanen Transformation als Summen von Quadraten dar, so vereinfacht sich die Herleitung aller hierher gehörigen Resultate in überraschender Weise, und es kann jetzt zweifelhaft erscheinen, ob der Vorzug grösserer Einfachheit, welchen *Möbius* (Sitzungsber. d. sächs. Ges. d. Wiss. v. 15. März 1862) für seine mehr geometrische Behandlung dieser Theorie geltend macht, ihr auch jetzt noch zuzusprechen ist, ganz abgesehen davon, dass die hier angegebenen Methoden unmittelbar bei analogen Untersuchungen innerhalb höherer Mannigfaltigkeiten angewendet werden können.

Zweitens hoffe ich, durch Hinzufügung einer Reihe von neuen Resultaten die *Kummer*schen Untersuchungen in einigen wesentlichen Punkten ergänzt zu haben. In ihr sind nämlich im Wesentlichen nur die fünf Hauptpunkte des Mittelstrahles eines Bündels, nämlich sein Mittelpunkt, sowie seine beiden Brenn- und Grenzpunkte betrachtet und die Haupt-

eigenschaften der zu ihnen gehörigen Abstandsrichtungen erörtert worden, dagegen wird auf die Lage und auf die engeren Beziehungen der Nachbarstrahlen zu einander und zu ihrem Mittelstrahle fast garnicht eingegangen. — Führt man nun die Werthe jener vorhin erwähnten Differentialformen als unabhängige Veränderliche ein, so ergeben sich aus ihnen die einem Nachbarstrahle entsprechenden Differentiale der unabhängigen Variablen allerdings nicht ein- sondern vierdeutig, aber die vier durch sie bestimmten Nachbarstrahlen stehen ihren Haupteigenschaften nach in der allerengsten Beziehung zu einander, deren ausführlicher Darlegung ein Theil dieser Arbeit gewidmet ist. Ferner lassen sich auch die Eigenschaften der durch ein Strahlenbündel in beliebiger Richtung geführten Schnitte deshalb einfacher und genauer angeben, weil das der Betrachtung zu Grunde gelegte Coordinatensystem den Bedürfnissen einer jeden Specialuntersuchung mit Leichtigkeit angepasst werden kann.

Berlin, den 16. Mai 1887.

§ 1.

Analytische Bestimmung der Lage eines beliebigen Nachbarstrahles in Bezug auf den Mittelstrahl eines unendlich dünnen Strahlenbündels.

Ein geradliniges Strahlensystem sei in der Weise gegeben, dass seine Strahlen bekannte Functionen zweier unabhängigen Variabeln u und v sind. Ein beliebiger Strahl L des Systems, für den $u = u_0$, $v = v_0$ sein mögen, ist bestimmt, wenn man die rechtwinkligen Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ irgend eines auf ihm liegenden Punktes, des sogenannten *Anfangspunktes*, sowie die Richtungscosinus $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ derjenigen Winkel, welche derselbe mit den drei Coordinatenaxen bildet, als Functionen von u_0 und v_0 kennt. Ein jeder Punkt von L bestimmt sich alsdann eindeutig durch seine Entfernung r vom Anfangspunkte, oder seine Abscisse, wenn man die positive und negative Richtung auf dem Strahle durch das Vorzeichen von r kennzeichnet.

Im Folgenden soll das Strahlenbündel betrachtet werden, welches durch die dem Mittelstrahle L unendlich nahen Strahlen gebildet wird. Analytisch ist ein jeder Nachbarstrahl l von L durch seine Coordinaten

$$u = u_0 + du, \quad v = v_0 + dv,$$

also auch durch die ihm entsprechenden Incremente $du\,dv$ selbst, eindeutig

bestimmt. Geometrisch ist der Strahl l gegeben, wenn man einmal die Abscisse r seines ***Abstandspunktes***, d. h. desjenigen Punktes auf L kennt, in welchem l und L ihre geringste Entfernung π besitzen, ferner die Grösse jener unendlich kleinen Strecke π, sowie ihre Richtung, d. h. ihre Richtungscosinus $\varkappa\,\lambda\,\mu$, und endlich den unendlich kleinen Winkel $d\varepsilon$, welchen l mit L bildet. Es ist leicht, diese sechs Bestimmungsstücke durch die dem Nachbarstrahle l entsprechenden Incremente $dx\,dy\,dz$, $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ auszudrücken. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von höherer als der ersten Ordnung ergiebt sich nämlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} a)\quad r = -\dfrac{dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta}{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}, \\ b)\quad d\varepsilon^2 = d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2, \\ c)\quad s = \varpi_1\varkappa+\varpi_2\lambda+\varpi_3\mu = \dfrac{1}{d\varepsilon}\begin{vmatrix} \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix}, \\ d)\quad \pi = \dfrac{1}{d\varepsilon}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix}, \end{cases}$$

wo $\varpi_1\varpi_2\varpi_3$ Unbestimmte bedeuten und $d\varepsilon$ auch seinem Vorzeichen nach durch die Forderung bestimmt ist, dass die Strecke π positiv sein soll.

Denkt man sich jetzt die Incremente $dx\,dy\,dz$, $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ durch die partiellen Ableitungen von $x\,y\,z$, $\xi\,\eta\,\zeta$ nach u und v und die Differentiale $du\,dv$ ausgedrückt, so erhält man für die vorher angegebenen Bestimmungsstücke die folgenden Ausdrücke:

$$(2.)\quad \begin{cases} a)\quad r = -\dfrac{e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}, \\ b)\quad d\varepsilon^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \\ c)\quad s = \dfrac{1}{\Delta\,d\varepsilon}\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & \Sigma\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\varpi_1 \\ F\,du+G\,dv & \Sigma\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\varpi_1 \end{vmatrix} = \varpi_1\varkappa+\varpi_2\lambda+\varpi_3\mu, \\ d)\quad \pi = \\ \qquad \dfrac{1}{d\varepsilon}\left\{\dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & e\,du+f\,dv \\ F\,du+G\,dv & f\,du+g\,dv \end{vmatrix} - \dfrac{f_1-f_2}{2\Delta}(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)\right\}, \end{cases}$$

wo sich das Summenzeichen, wie überhaupt stets in dieser Arbeit, auf die

Grössen xyz, $\xi\eta\zeta$ und die Indices 123 bezieht, und die neu auftretenden Coefficienten sich in der folgenden Weise durch die partiellen Ableitungen der Grössen xyz, $\xi\eta\zeta$ nach u und v ausdrücken:

$$(2^a.)\quad \begin{cases} a) & E = \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2, \qquad e = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial u}, \\ b) & F = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v}, \qquad \begin{array}{l} f_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial u}, \\ f_2 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v}, \end{array} \qquad f = \frac{1}{2}(f_1+f_2), \\ c) & G = \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2, \qquad g = \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial v}, \\ d) & \Delta^2 = EG-F^2 = \Sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung von (2^a.) ergiebt sich, dass die Grösse Δ^2 nie negativ, dass also Δ selbst stets reell ist. Der besondere Fall, dass diese Grösse verschwindet, soll, da er sich durch Grenzbetrachtungen einfach erledigen lässt, hier unberücksichtigt bleiben. Im Folgenden soll für Δ stets der positive Werth von $\sqrt{EG-F^2}$ gewählt werden; durch diese Festsetzung ist dann die positive Richtung auf L eindeutig bestimmt.

Sind $\varkappa\lambda\mu$, $\varkappa'\lambda'\mu'$ die Richtungscosinus der kürzesten Abstände π, π' irgend zweier Nachbarstrahlen l, l', denen die Incremente $du dv$, $du' dv'$ der unabhängigen Variablen zukommen, so ist der Sinus desjenigen Winkels $(\pi\pi')$, welchen jene beiden Abstände mit einander bilden, eindeutig durch die Gleichung:

$$\sin(\pi\pi') = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \varkappa & \lambda & \mu \\ \varkappa' & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

bestimmt. Aus ihr ergiebt sich durch eine einfache Determinantenumformung:

$$\sin(\pi\pi') = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\cdot\varkappa\right) & \Sigma\left(\frac{\partial\xi'}{\partial u}\cdot\varkappa'\right) \\ \Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\cdot\varkappa\right) & \Sigma\left(\frac{\partial\xi'}{\partial v}\cdot\varkappa'\right) \end{vmatrix}$$

oder mit Benutzung von (2.), c), indem man dort an Stelle der Unbestimmten $\varpi_1\varpi_2\varpi_3$ beziehlich

$$\frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

setzt:

$$(3.) \qquad \sin(\pi\pi') = \Delta \cdot \frac{du\,dv' - dv\,du'}{d\varepsilon . d\varepsilon'},$$

wenn, wie überhaupt im Folgenden, die zu einem Strahle l' oder l_a gehörigen Bestimmungsstücke in entsprechender Weise bezeichnet werden. Man erkennt ohne Rechnung, dass diese Vorzeichenbestimmung mit der in (1.), *c*) und (1.), *d*) für $\sin(d\varepsilon) = d\varepsilon$ gegebenen zusammenfällt, wenn man, wie dies vorher geschehen ist, als positive Richtung der auf L und l senkrechten Geraden π die von L nach l gehende ansieht.

§ 2.

Transformation der Bestimmungsgleichungen eines Nachbarstrahles. Definition der conjugirten, verbundenen und entgegengesetzten Nachbarstrahlen und der Strahlenbündel gleicher Neigung.

Die allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme lässt sich, wie jetzt gezeigt werden soll, auf die Untersuchung der beiden binären quadratischen Differentialformen zurückführen:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \varphi = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ \psi = e du^2 + 2f du dv + g dv^2, \end{cases}$$

von denen die erstere nach (2^a.), *d*) des vorigen Paragraphen stets eine definite ist. Die Untersuchung dieser Formen vereinfacht sich ganz ausserordentlich, wenn man dieselben simultan in die Summe zweier Quadrate transformirt.

Es mögen also p, q zwei neue unendlich kleine Grössen sein, welche mit du, dv durch die Gleichungen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} du = \alpha p + \beta q, \\ dv = \gamma p + \delta q \end{cases}$$

zusammenhängen, und welche so gewählt sind, dass die Formen φ und ψ beziehlich in

$$(3.) \qquad \begin{cases} \varphi = p^2 + q^2, \\ \psi = -(w_1 p^2 + w_2 q^2) \end{cases}$$

übergehen. Man sieht leicht, dass eine derartige Transformation stets möglich ist, und welches die Werthe der Substitutionscoefficienten und der

Grössen w_1, w_2 sind. Da nämlich die Formenschaar $w\varphi+\psi$ für $w = w_1$ und $w = w_2$ eine verschwindende Determinante besitzen muss, so bestimmen sich diese Grössen als die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} Ew+e & Fw+f \\ Fw+f & Gw+g \end{vmatrix} = \Delta^2(w^2-2Hw+K) = 0,$$

wo

$$(4^a.)\qquad H = -\frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)},\quad K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

die beiden absoluten Invarianten der Formenschaar $w\varphi+\psi$ sind. Die neuen Coordinaten p und q und damit auch die Substitutionscoefficienten in (2.) bestimmen sich alsdann durch die aus (3.) folgenden Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} (w_2-w_1)p^2 = w_2\varphi+\psi, \\ (w_1-w_2)q^2 = w_1\varphi+\psi. \end{cases}$$

Eine Vergleichung der Determinanten der ursprünglichen und der transformirten Form φ liefert den Werth der Substitutionsdeterminante:

$$(6.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma = \frac{1}{\Delta},$$

woraus auch hervorgeht, dass dieselbe stets endlich und von Null verschieden ist.

Aus (4.) folgt, dass w_1 und w_2 stets endliche Grössen sind, da der Fall $\Delta = 0$ ausgeschlossen ist *). Eine einfache Umformung der Discriminante H^2-K der determinirenden Gleichung (4.) ergiebt aber noch weiter, dass w_1 und w_2 und damit auch die Coefficienten der Substitution (5.) stets reellwerthige Functionen von u und v sind. Bezeichnet man nämlich die Determinanten:

$$eF-fE,\quad gE-eG,\quad fG-gF$$

beziehlich durch

$$\mathrm{E},\qquad \mathrm{F},\qquad \mathrm{G},$$

so besteht die identische Gleichung:

$$(7.)\qquad \left(\frac{w_1-w_2}{2}\right)^2 = H^2-K = \frac{1}{4\Delta^4(\Delta^2+F^2)}\{\mathrm{F}^2\Delta^2+(\mathrm{E}G-\mathrm{G}E)^2\},$$

---

*) Der Fall $\Delta = 0$ ist in der erwähnten *Kummer*schen Arbeit vollständig behandelt worden (vgl. a. a. O. S. 208), ebenso auch der noch speciellere Fall, dass ausserdem noch $f_1 = f_2$ ist. In diesem letzten Falle verschwinden alle Coefficienten in der Entwickelung der Determinante (4.).

woraus sich ergiebt, dass diese Discriminante nie negativ ist, dass also w_1 und w_2 reale Werthe besitzen. Verschwindet die Discriminante, wird also $w_1 = w_2 = w_0$, so nimmt diese Bedingung unter Hinzuziehung von (7.) und der identischen Gleichung:

$$E\mathrm{G}+F\mathrm{F}+G\mathrm{E} = 0$$

die Form an:

$$\mathrm{F}^2\Delta^2+\mathrm{E}^2G^2+\mathrm{G}^2E^2 = 0,$$

es muss daher:

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathrm{G} = 0,$$

also:

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = -w_0,$$

mithin:

$$w_0\varphi+\psi = 0$$

sein. Auch in diesem Falle ist es also möglich, der Bedingung (3.) durch eine reale Substitution zu genügen. Es mögen die Wurzeln der Gleichung (4.) so bezeichnet angenommen werden, dass

$$(8.) \qquad w_2-w_1 \geqq 0$$

ist.

Für die Functionaldeterminante der Formen φ und ψ ergiebt sich mit Hülfe von (1.), (2.), (3.) die Gleichung:

$$(9.) \qquad \begin{vmatrix} Edu+Fdv & edu+fdv \\ Fdu+Gdv & fdu+gdv \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{vmatrix} p & w_1 p \\ q & w_2 p \end{vmatrix} = \Delta(w_2-w_1)pq.$$

Es mögen jetzt an Stelle von $du\,dv$ zwei neue unabhängige Variable σ, τ eingeführt werden, welche mit jenen durch die Gleichungen:

$$(10.) \qquad \begin{cases} Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 = p^2+q^2 = \tau, \\ \frac{1}{\Delta}\{(Edu+Fdv)(fdu+gdv)-(Fdu+Gdv)(edu+fdv)\} = (w_2-w_1)pq = \sigma \end{cases}$$

zusammenhängen. Setzt man zur Abkürzung:

$$(11.) \qquad \frac{\sigma}{\tau} = (w_2-w_1)\cdot\frac{pq}{p^2+q^2} = \bar{\sigma},$$

so drücken sich nach (2.) des vorigen Paragraphen die Bestimmungsstücke der Nachbarstrahlen in den neuen Coordinaten pq, beziehungsweise $\sigma\tau$ fol-

gendermassen aus:

$$(12.)\quad \begin{cases} a) & r = \dfrac{w_1 p^2 + w_2 q^2}{p^2+q^2}, \\ b) & d\varepsilon^2 = p^2+q^2 = \tau, \\ c) & \dfrac{\pi}{d\varepsilon} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b, \qquad (\pi \geqq 0), \\ d) & \bar{\sigma}_b = \dfrac{f_1 - f_2}{2\Delta}. \end{cases}$$

Sind l und l' zwei beliebige Nachbarstrahlen, $p\,q$, $p'q'$ ihre Coordinaten, so erhält man für den Sinus des Winkels $(\pi\pi')$, den ihre kürzesten Abstände mit einander bilden, aus (3.) § 1 und (6.) den folgenden einfachen Ausdruck:

$$(13.)\qquad \sin(\pi\pi') = \frac{pq' - qp'}{d\varepsilon . d\varepsilon'}.$$

Aus (10.) ergiebt sich, dass die Grössen σ und τ für die Nachbarstrahlen im Allgemeinen unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind. Nimmt man diese als gegeben an, so bestimmen sich p und q und damit auch du und dv im Allgemeinen mehrdeutig. Man erhält dann und nur dann reale Werthe für diese Differentiale, wenn die Bedingung:

$$(14.)\qquad \begin{cases} -\bar{\sigma}_0 \leqq \bar{\sigma} \leqq +\bar{\sigma}_0, \\ \bar{\sigma}_0 = \dfrac{w_2 - w_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{H^2 - K} \end{cases}$$

erfüllt ist; einem jeden dieser Bedingung gemäss gewählten Werthepaare (σ, τ) werden im Allgemeinen die Coordinaten (p, q) von vier Nachbarstrahlen entsprechen, welche letzteren in der allerengsten Beziehung zu einander stehen. Dieselben sollen daher *verbundene Strahlen* genannt werden. Die vier zu verbundenen Strahlen gehörigen Werthepaare pq lassen sich als die Coordinaten der Durchschnittspunkte eines Kreises und einer Hyperbel auffassen, welche durch die Gleichungen:

$$p^2+q^2 = \tau, \quad 2pq = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}_0}$$

definirt sind. Im engeren Sinne sollen die beiden Strahlen, für welche p und q auf einem und demselben Hyperbelbogen liegen, *conjugirte*, diejenigen, deren Coordinaten auf demselben Hyperbeldurchmesser liegen, *Diametralstrahlen* genannt werden.

In engem Zusammenhange mit diesen stehen auch diejenigen vier

Nachbarstrahlen, welche dem Werthepaare $(-\sigma, \tau)$ entsprechen, deren Coordinaten (p, q) also die Durchschnittspunkte der zu der vorhin erwähnten conjugirten Hyperbel mit demselben Kreise sind.

Sind σ und τ so gewählt, dass:

$$0 \leqq \bar{\sigma} \leqq \bar{\sigma}_0,$$

und bezeichnet man mit (p, q) diejenigen positiven Werthe der Coordinaten, welche den Bedingungen:

$$(15.)\qquad p^2+q^2=\tau,\quad 2pq=\frac{\sigma}{\sigma_0},\quad p^2-q^2\geqq 0$$

genügen, so sind die Coordinaten der vier zu (σ, τ) gehörigen verbundenen Strahlen:

$$l_1,\qquad l_2,\qquad l_1',\qquad l_2'$$

beziehlich gleich:

$$(p,\ q),\quad (q,\ p),\quad (-p,\ -q),\quad (-q,\ -p),$$

während die vier dem Werthepaare $(-\sigma, \tau)$ entsprechenden verbundenen Strahlen

$$\lambda_1,\qquad \lambda_2,\qquad \lambda_1',\qquad \lambda'$$

die Coordinaten

$$(-q,\ p),\quad (-p,\ q),\quad (q,\ -p),\quad (p,\ -q)$$

haben. Es sind dann z. B. die Strahlen l_1, l_2 conjugirte, l_1, l_1' Diametralstrahlen, und es sollen ferner zwei Strahlen, deren Coordinaten sich zu einander wie diejenigen von l_1 und λ_1 verhalten, ***entgegengesetzte Strahlen*** genannt werden.

§ 3.

Die Haupteigenschaften der verbundenen, conjugirten und entgegengesetzten Strahlen.

Es sollen jetzt die Beziehungen, welche zwischen den acht soeben charakterisirten Strahlen bestehen, untersucht werden.

Seien l und l' zwei beliebige Nachbarstrahlen von L, (σ, τ), (σ', τ') die ihnen entsprechenden Werthe der Formen (10.) des vorigen Paragraphen. Sind dann r und r' die Abscissen ihrer Abstandspunkte, und ist $(\pi\pi')$ der Winkel, welchen ihre kürzesten Abstände vom Mittelstrahle π und π' mit einander bilden, so ergiebt sich aus (12.) und (13.) des vorigen Para-

graphen:

$$
(1.)\quad \begin{cases}
a) & r-r' = 2\bar{\sigma}_0\cdot\dfrac{p^2q'^2-p'^2q^2}{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)}, \\
b) & \sin(\pi\pi') = \dfrac{pq'-qp'}{d\varepsilon d\varepsilon'}, \\
c) & \cos(\pi\pi') = \dfrac{pp'+qq'}{d\varepsilon . d\varepsilon'}, \\
d) & \dfrac{\pi'}{d\varepsilon'}-\dfrac{\pi}{d\varepsilon} = \bar{\sigma}'-\bar{\sigma} = 2\bar{\sigma}_0\left(\dfrac{p'q'}{p'^2+q'^2}-\dfrac{pq}{p^2+q^2}\right).
\end{cases}
$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen kann man die speciellen Beziehungen zwischen conjugirten, entgegengesetzten und Diametralstrahlen leicht ableiten: Seien zunächst l_1 und l_2 irgend zwei conjugirte Strahlen, (p, q) und (q, p) ihre Coordinaten, wobei der Einfachheit wegen, wie überhaupt im Folgenden, angenommen werden soll, dass p, q und $\bar{\sigma}$ den Bedingungen (15.) des vorigen Paragraphen genügen, so ergiebt sich:

$$
(2.)\quad \begin{cases}
a) & r_2-r_1 = 2\bar{\sigma}_0\cdot\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \\
b) & \sin(\pi_1\pi_2) = \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \quad \cos(\pi_1\pi_2) = \dfrac{2pq}{p^2+q^2} = \dfrac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0}, \\
c) & d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = \sqrt{\tau}, \quad \pi_1 = \pi_2, \\
d) & \dfrac{\pi_1'}{d\varepsilon'}-\dfrac{\pi_1}{d\varepsilon} = \bar{\sigma}'-\bar{\sigma} = 2\bar{\sigma}_0\sin(\pi_1\pi_1')\sin(\pi_1\pi_2'),
\end{cases}
$$

wo π_1' und π_2' die zu $\bar{\sigma}'$ gehörigen conjugirten kürzesten Abstände sind; aus $a)$ und $b)$ folgt noch die merkwürdige Relation:

$$(3.)\quad r_2-r_1 = 2\bar{\sigma}_0\sin(\pi_1\pi_2).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergiebt sich, dass die Abstandspunkte zweier conjugirten Strahlen dann und nur dann zusammenfallen, wenn

$$p = \pm q, \quad \bar{\sigma} = \pm\bar{\sigma}_0$$

ist, und man erkennt leicht, dass für diese speciellen Werthe je zwei conjugirte Strahlen überhaupt zusammenfallen.

Aus (12^a.) des vorigen Paragraphen ergiebt sich für die Abscisse r_0 dieser Strahlen:

$$(4.)\quad r_0 = \frac{w_1+w_2}{2} = H.$$

Derjenige Punkt des Mittelstrahles, dessen Abscisse $r_0 = H$ ist, soll sein ***Mittelpunkt***, diejenigen Nachbarstrahlen, welche hier ihren kürzesten Abstand haben, die ***Mittelpunktstrahlen*** des Bündels genannt werden. Für jeden Werth von τ giebt es dann zwei Paare von diametral entgegengesetzten Mittelpunktstrahlen l_0, l'_0 und λ_0, λ'_0, welche beziehlich durch die Gleichungen:

$$\bar{\sigma} = +\bar{\sigma}_0 \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} = -\bar{\sigma}_0$$

bestimmt sind.

Setzt man in (1.) an Stelle von l den Mittelstrahl l_0 und für l' jeden der beiden conjugirten Strahlen l_1, l_2, so ergiebt sich zunächst:

$$(5.)\quad \begin{cases} a) & r_0 - r_1 = \bar{\sigma}_0 \cdot \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \\ b) & \sin(\pi_1\pi_0) = \dfrac{p-q}{\sqrt{2}.d\varepsilon}, \\ c) & \cos(\pi_1\pi_0) = \dfrac{p+q}{\sqrt{2}.d\varepsilon}; \end{cases}$$

aus den drei Gleichungen (5.) kann man dann sofort die auch schon von ***Möbius*** a. a. O aufgestellte Gleichung ableiten:

$$(6.)\quad r = r_0 - \bar{\sigma}_0 \sin(2\pi\pi_0).$$

Alle Strahlen, deren Projectionen auf eine zum Mittelstrahl senkrechte Ebene parallel sind, haben also einen und denselben Abstandspunkt.

Aus (5.) folgt ferner mit Hülfe der analogen Ausdrücke für den Strahl l_2:

$$(7.)\quad \begin{cases} (r_0-r_1)+(r_0-r_2) = 0, \\ \sin(\pi_1\pi_0)+\sin(\pi_2\pi_0) = 0, \\ \cos(\pi_1\pi_0) = \cos(\pi_2\pi_0). \end{cases}$$

Die Formeln (2.) und (7.) lassen die Beziehungen, welche zwischen conjugirten Strahlen bestehen, deutlich erkennen. Dieselben können folgendermassen ausgesprochen werden:

Die Abstandspunkte conjugirter Nachbarstrahlen liegen symmetrisch zum Mittelpunkte, ihre Abstandsrichtung symmetrisch zu ihrer Mittelabstandsrichtung. Ihr Abstand vom Mittelstrahle, sowie ihre Neigung gegen denselben ist für beide Strahlen gleich.

Im Folgenden sollen deshalb irgend zwei zum Mittelpunkte symmetrisch liegende Punkte des Mittelstrahles *conjugirte Punkte* genannt werden.

Sind $l_1 l_1'$ zwei Diametralstrahlen, (p, q), $(-p, -q)$ ihre Coordinaten, so ergeben sich mit Hülfe von (1.) die Sätze:

Die Abstandspunkte irgend zweier Diametralstrahlen fallen zusammen, ihre Abstände sind einander diametral entgegengesetzt, ihre Entfernung vom Mittelstrahle, sowie ihre Neigung gegen denselben, sind gleich.

Für zwei entgegengesetzte Strahlen, deren Coordinaten (p, q) und $(-q, p)$ sind, erhält man endlich die Sätze:

Die Abstandspunkte zweier entgegengesetzten Strahlen sind conjugirte Punkte, ihre Abstandsrichtungen stehen auf einander senkrecht.

Besondere Beachtung verdienen diejenigen Nachbarstrahlen, für welche die Entfernung des Abstandspunktes vom Mittelpunkte ihren grössten, beziehungsweise kleinsten Werth besitzt: diese Punkte des Mittelstrahles sollen die *Grenzpunkte* des kürzesten Abstandes, die zu ihnen gehörigen Strahlen die *Grenzstrahlen* genannt werden, da sich die Abstandspunkte aller Nachbarstrahlen zwischen jenen beiden Punkten befinden müssen. Aus (5.) ergiebt sich unmittelbar, dass für einen bestimmten Werth von τ die Grenzstrahlen die Coordinaten

$$(\sqrt{\tau},\ 0) \quad \text{und} \quad (0,\ \sqrt{\tau})$$

haben, dass für sie also:

$$\sigma = 0$$

ist. Sind $\bar{l}_1 \bar{l}_2$ diejenigen unter diesen Strahlen, welchen z. B. der positive Werth der Quadratwurzel zukommt, und sind $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ ihre Abscissen, $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ ihre Abstandsrichtungen, so folgt aus (2.) und aus (12.) des vorigen Paragraphen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \bar{r}_1 = w_1, \quad \bar{r}_2 = w_2, \\ \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = 2\bar{\sigma}_0, \\ \sin(\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2) = +1, \quad \cos(\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2) = 0. \end{cases}$$

Die Grenzpunkte für die kürzesten Abstände sind also die Wurzeln der determinirenden Gleichung (4.) § 2; sie liegen daher, falls $\Delta^2 > 0$ ist, stets im Endlichen, und die ihnen entsprechenden

Nachbarstrahlen sind einander conjugirt. Die zu den Grenzpunkten gehörigen kürzesten Abstände stehen auf einander senkrecht, und zwar ist der Winkel $(\bar{\pi}_1\bar{\pi}_2) = +\frac{\pi}{2}$.

Nähert sich Δ^2 unbegrenzt dem Werthe Null, so ergiebt sich aus No. (4.) des vorigen Paragraphen, dass $w_1 = \bar{r}_1$ und $w_2 = \bar{r}_2$ alsdann unendlich gross werden, da in diesem Falle:

$$EG - F^2 \quad \text{und} \quad Eg - 2Ff + Ge$$

unendlich klein werden, während $eg - f^2$ im Allgemeinen endlich bleibt.

Bis jetzt war nur nachgewiesen worden, dass die kürzesten Abstände entgegengesetzter Nachbarstrahlen auf einander senkrecht stehen, dagegen fehlte noch die Entscheidung der Frage, in welchem Sinne der Abstand des ersten Strahls um $\frac{\pi}{2}$ zu drehen ist, damit er in die Richtung des entgegengesetzten falle; zur Beantwortung dieser Frage führen die folgenden Ueberlegungen:

Es seien r_1, r_2 die Abscissen zweier conjugirten Nachbarstrahlen l_1 und l_2; ist ferner l ein beliebiger Strahl, r seine Abscisse und sind $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}$ die zu l_1 und l gehörigen Werthe von $\frac{\sigma}{\tau}$, so ergiebt sich aus (1.) und aus (11.) des vorigen Paragraphen durch eine einfache Umformung:

$$(9.) \qquad (r - r_1)(r - r_2) = \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}^2.$$

Der Abstandspunkt eines beliebigen Nachbarstrahles l liegt also innerhalb oder ausserhalb des durch zwei beliebige conjugirte Punkte gebildeten Intervalles, je nachdem der dem Strahle l entsprechende Coordinatenquotient σ seinem absoluten Werthe nach kleiner oder grösser ist als der durch l_1 und l_2 bestimmte Coordinatenquotient $\bar{\sigma}_1$.

Setzt man in (9.) $\bar{\sigma}_1 = 0$, also nach (8.) $r_1 = w_1$, $r_2 = w_2$, so erhält man die Gleichung, durch welche zwei conjugirte Abscissen mit ihrem Coordinatenquotienten verbunden sind:

$$(10.) \qquad (r - w_1)(r - w_2) + \bar{\sigma}^2 = 0$$

oder nach (4.) des vorigen Paragraphen:

$$(10^a.) \qquad r^2 - 2Hr + K + \sigma^2 = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass conjugirte Punkte des Mittelstrahles als die con-

jugirten Wurzeln von quadratischen Gleichungen erscheinen, welche für den Rationalitätsbereich $(H, K, \bar{\alpha})$ irreductibel sind. Ferner ergiebt sich, dass die Gleichung (10^a.) für:

$$\bar{\sigma}_0^2 \geqq \bar{\sigma}^2 \geqq 0$$

zwei conjugirte zwischen den beiden Grenzpunkten liegende Punkte definirt, während für:

$$\bar{\sigma}^2 < 0,$$

also für einen rein imaginären Werth von $\bar{\sigma}$, durch diese Gleichung zwei ausserhalb der Grenzpunkte liegende conjugirte Punkte bestimmt sind. Diejenigen Nachbarstrahlen, deren Abstandspunkte hier liegen, entsprechen complexen Werthen der Incremente du, dv. Die Untersuchung ihrer Eigenschaften ist nicht ohne Interesse, sie soll aber in dieser Arbeit nicht gegeben werden.

Aus den Gleichungen (12.), § 2:

$$\text{(11.)} \qquad d\varepsilon^2 = \tau, \quad \frac{\pi}{d\varepsilon} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b, \quad \bar{\sigma}_b = \frac{f_1 - f_2}{2\Delta}, \quad \pi \geqq 0$$

ergiebt sich ferner: Ist $\bar{\sigma}_b^2 > \bar{\sigma}_0^2$, so ist $(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)$ stets endlich, und das Vorzeichen des Neigungswinkels $d\varepsilon$ ist für alle Nachbarstrahlen dasselbe. Ist dagegen $\bar{\sigma}_b^2 \leqq \bar{\sigma}_0^2$, so existiren reale Nachbarstrahlen, welche dem Werthe

$$\text{(12.)} \qquad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_b = \frac{f_1 - f_2}{2\Delta}$$

des Quotienten $\frac{\sigma}{\tau}$ entsprechen, für welche der kürzeste Abstand π_b im Verhältniss zu $d\varepsilon = \sqrt{\tau}$ verschwindet. Diejenigen Nachbarstrahlen, deren Coordinaten der Bedingung (12.) genügen, gehen also sämmtlich durch den Mittelstrahl hindurch; die beiden conjugirten Punkte B_1, B_2 des Mittelstrahles. durch welche sie hindurchgehen, werden ***Brennpunkte*** desselben genannt. Ihre Abscissen $\varrho_1 \varrho_2$ genügen nach (10^a.) der quadratischen Gleichung:

$$\text{(13.)} \qquad r^2 - 2Hr + K + \left(\frac{f_1 - f_2}{2\Delta}\right)^2 = 0.$$

Alle Nachbarstrahlen, welche durch einen und denselben Brennpunkt, z. B. B_1 hindurchgehen, liegen in derjenigen durch den Mittelstrahl gelegten Ebene, auf welcher die zu B_1 gehörige Abstandsrichtung π_b senkrecht steht. Die den Brennpunkten $B_1 B_2$ in diesem Sinne zugeordneten Ebenen $F_1 F_2$, werden die beiden ***Fokalebenen*** des Bündels genannt. Nach (2.) bestimmt sich der

Winkel F_1F_2, den die beiden Fokalebenen mit einander bilden, durch die Gleichung:

$$(14.)\qquad \cos(F_1F_2) = \pm\frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{\sigma}_0} \gtreqqless 0,$$

und da $\pi_b\pi_{b'}$, also auch F_1F_2 conjugirte Richtungen haben, so liegen auch die Fokalebenen symmetrisch zu der ihnen entsprechenden Mittelabstandsrichtung.

Sind nun ll' irgend zwei entgegengesetzte Nachbarstrahlen, $\pi\pi'$ ihre Abstände, $d\varepsilon d\varepsilon'$ ihre Neigungswinkel, $\bar{\sigma}$ und $-\bar{\sigma}$ die ihnen entsprechenden Werthe von $\frac{\sigma}{\tau}$, so folgt aus (9.) und aus (12.), § 2:

$$(15.)\qquad \pi.\pi' = (\bar{\sigma}_b^2-\bar{\sigma}^2)d\varepsilon.d\varepsilon' = (r-\varrho_1)(r-\varrho_2)d\varepsilon.d\varepsilon',$$

und da dieses Product stets positiv sein soll, so ergeben sich für die Neigungswinkel $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ entgegengesetzter Strahlen die folgenden Sätze:

> In Strahlenbündeln ohne Brennpunkte haben je zwei entgegengesetzte Strahlen gleiche Neigung gegen den Mittelstrahl. In Strahlenbündeln, welche reale Brennpunkte besitzen, ist der Neigungswinkel entgegengesetzter Strahlen gleich oder entgegengesetzt, je nachdem ihre Abstandspunkte ausserhalb oder innerhalb der beiden Brennpunkte liegen.

Der Sinus der Winkel $(\pi\pi')$, welchen die Abstandsrichtung der vorhin betrachteten Strahlen l_1 mit der der ihm entgegengesetzten l'_1 bildet, bestimmt sich jetzt mit Leichtigkeit auch seinem Vorzeichen nach. Aus (1.) und (15.) ergiebt sich nämlich:

$$(16.)\qquad \sin(\pi\pi') = \frac{p^2+q^2}{d\varepsilon.d\varepsilon'} = \frac{p^2+q^2}{\pi.\pi'}(r-\varrho_1)(r-\varrho_2) = \pm 1,$$

je nachdem $(r-\varrho_1)(r-\varrho_2) \gtrless 0$ ist. Man erhält also den Satz:

> Der Winkel, welchen die Abstandsrichtung des soeben betrachteten Strahles mit derjenigen des ihm entgegengesetzten bildet, ist gleich $\pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem die Abstandspunkte der Strahlen ausserhalb oder innerhalb der beiden Brennpunkte liegen.

Endlich mögen noch diejenigen Beziehungen untersucht werden, welche zwischen den Bestimmungsstücken von drei beliebigen Nachbarstrahlen l, l_1, l_2 bestehen. Nennt man γ, γ_1, γ_2 diejenigen Winkel, welche

ihre kürzesten Abstände π, π_1, π_2 mit ihren conjugirten π', π'_1, π'_2 bilden, so folgt aus den drei aus (6.) sich ergebenden Gleichungen:

$$r+2\bar{\sigma}_0 \sin\gamma - r_0 = 0,$$

$$r_1+2\bar{\sigma}_0 \sin\gamma_1 - r_0 = 0,$$

$$r_2+2\bar{\sigma}_0 \sin\gamma_2 - r_0 = 0$$

die Identität:

$$(17.)\qquad \begin{vmatrix} r & \sin\gamma & 1 \\ r_1 & \sin\gamma_1 & 1 \\ r_2 & \sin\gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Entwickelung dieser Determinante erhält man die folgende sehr allgemeine Gleichung:

$$(18.)\qquad r\sin(\pi_1\pi_2)\cos(\pi_1\pi'_2)+r_1\sin(\pi_2\pi)\cos(\pi_2\pi')+r_2\sin(\pi\pi_1)\cos(\pi\pi'_1) = 0.$$

Dieselbe lehrt also die Abscisse r eines jeden Nachbarstrahles l aus seiner Abstandsrichtung π finden, sobald man zwei beliebige Nachbarstrahlen l_1, l_2 ihrer Lage nach kennt. Zu diesem Zwecke bringt man die Gleichung (18.) besser auf die Form:

$$(18^a.)\qquad r\sin(\pi_1\pi_2)\cos(\pi_1\pi'_2) = r_1\sin(\pi\pi_2)\cos(\pi\pi'_2)-r_2\sin(\pi\pi_1)\cos(\pi\pi'_1).$$

Sind $l_1 l_2$ speciell conjugirte Nachbarstrahlen, und setzt man:

$$\omega_1 = (\pi\pi_1),\quad \omega_2 = (\pi\pi_2),$$

also

$$\omega_2-\omega_1 = (\pi_1\pi_2),$$

so erhält man die einfache Relation:

$$(19.)\qquad r\sin(\omega_2-\omega_1) = r_1\sin\omega_2\cos\omega_1 - r_2\cos\omega_2\sin\omega_1$$

oder auch:

$$(19^a.)\qquad r(\operatorname{tg}\omega_2-\operatorname{tg}\omega_1) = r_1\operatorname{tg}\omega_2 - r_2\operatorname{tg}\omega_1$$

und

$$(19^b.)\qquad \frac{r-r_1}{r-r_2} = \frac{\operatorname{tg}\omega_1}{\operatorname{tg}\omega_2}.$$

Die Entfernungen eines beliebigen Punktes C von zwei conjugirten Punkten $A_1 A_2$ verhalten sich also wie die Tangenten derjenigen Winkel, welche die Abstandsrichtung in C mit denjenigen in A_1 und A_2 bildet.

Betrachtet man endlich den ganz speciellen Fall, wo l_1 und l_2 Grenz-

strahlen sind, so wird:

$$(\pi_1\pi_2) = \frac{\pi}{2}, \quad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2}+\omega,$$

und man erhält den *Hamilton*schen Hauptsatz:

$$(20.) \qquad r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Die Gleichung (20.) ist der in (18.) aufgestellten äquivalent, da jene, wenn auch auf weniger einfachem Wege, aus dieser abgeleitet werden kann. Für viele Anwendungen verdienen aber die zuerst gegebenen Relationen, besonders die in (19.) und (19^a.) angeführten, vor der *Hamilton*schen den Vorzug, da in ihnen die Nachbarstrahlen noch den speciellen Bedürfnissen der Untersuchung entsprechend gewählt werden können.

Diejenigen Nachbarstrahlen, für welche $\tau = d\varepsilon^2$ einen bestimmten Werth τ_1 hat, bilden eine unendlich dünne geradlinige Fläche, deren erzeugende Geraden sämmtlich eine und dieselbe Neigung gegen den Mittelstrahl haben. Diese Fläche umschliesst alle diejenigen Nachbarstrahlen und nur die, deren Neigung gegen L eine geringere ist. Ein in dieser Weise begrenztes Bündel soll ein *Strahlenbündel von constanter Neigung* und die äusseren Strahlen seine *Begrenzungsstrahlen* genannt werden; auf einige ihrer Eigenschaften soll im nächsten Paragraphen näher eingegangen werden. Für die Begrenzungsstrahlen ist $\tau = \tau_1$, während σ alle diejenigen Werthe durchläuft, welche der Bedingung:

$$-\bar{\sigma}_0 \leqq \bar{\sigma} \leqq \bar{\sigma}_0$$

genügen. Die Projection des kürzesten Abstandes dieser Begrenzungsstrahlen auf eine zum Mittelstrahle senkrechte Ebene beschreibt alsdann eine ebene Curve, deren Gleichung nach (12^c.), § 2 die folgende ist:

$$(21.) \qquad \frac{\pi}{d\varepsilon} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b, \quad \bar{\sigma}_b = \frac{f_1 - f_2}{2\Delta},$$

und hieraus ergiebt sich mit Benutzung von (2^d.)

$$\frac{\pi}{2\bar{\sigma}_0 d\varepsilon} = \sin(\pi\pi_b)\sin(\pi\pi_{b'}),$$

wo π die Abstandsrichtung des Strahles ist, während π_b und π'_b diejenigen der beiden Brennstrahlen bezeichnen. Setzt man also die constante unendlich kleine Grösse $2\bar{\sigma}_0 d\varepsilon$ gleich a, und nennt die Winkel $(\pi\pi_0)$ und $(\pi_b\pi_0)$ beziehungsweise φ und φ_b, so erhält man die folgende einfache Gleichung

jener interessanten Curve:

$$(21^a.)\qquad \pi = a\sin(\varphi-\varphi_b)\sin(\varphi+\varphi_b).$$

Diese Curve ist vom sechsten Grade; sie hat für den Fall, dass Brennpunkte existiren, vier Blätter. Sind die Strahlen des Bündels die sämmtlichen Normalen eines beliebigen Oberflächenelementes, ein Fall, der dann und nur dann eintritt, wenn $\bar{\sigma}_b = 0$ ist, so ergiebt sich aus (21.) die höchst einfache Gleichung der Projectionscurve:

$$(21^b.)\qquad \pi = a\cos 2\varphi.$$

In diesem Falle ist dieselbe also ein sogenanntes Vierblatt.

§ 4.

Ueber den Drehungswinkel eines beliebigen Nachbarstrahles in Bezug auf den Mittelstrahl.

Unter dem Drehungswinkel eines Strahles l in Bezug auf den Mittelstrahl L für eine Strecke AB versteht man nach *Kummer* denjenigen Winkel $(\overline{AB}) = \alpha$, welchen die in A und B auf L senkrechten durch l hindurchgehenden Geraden mit einander bilden.

Es sei zunächst A der Abstandspunkt für l, π sein kürzester Abstand, r seine Abscisse. Ist dann B ein beliebiger Punkt des Mittelstrahles mit der Abscisse R, so dass also:

$$AB = R-r = \varrho$$

ist, und bezeichnet man mit q die Länge des in B errichteten und durch l gehenden Lothes, so erhält man bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung die beiden Gleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} q\cos\alpha = \pi, \\ q\sin\alpha = (R-r)d\varepsilon = \varrho\, d\varepsilon \end{cases}$$

und hieraus mit Benutzung der Gleichungen ($12^c.$), § 2 und ($2^d.$), § 3:

$$(1^a.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{R-r}{\bar{\sigma}-\bar{\sigma}_b}\cdot = \frac{\varrho}{\bar{\sigma}-\bar{\sigma}_b} = \frac{\varrho}{2\bar{\sigma}_0\sin(\pi\pi_b')\sin(\pi\pi_b)}.$$

Zunächst mögen einige aus ($1^a.$) fast ohne Rechnung folgende Sätze über den Drehungswinkel angegeben werden. Setzt man für R die Abscisse des zu A conjugirten Punktes A', so ergiebt sich aus (1.) vermöge der Gleichungen (2.) und (3.) des vorigen Paragraphen:

$$(2.)\qquad \operatorname{tg}(\overline{AA'}) = \operatorname{tg}(F_1\pi)+\operatorname{tg}(F_2\pi),$$

wo $(F_1\pi)$, $(F_2\pi)$ diejenigen Winkel sind, welche die Fokalebenen mit der Abstandsrichtung π des zu untersuchenden Strahles bilden.

Sind α_1 und α_2 die Drehungswinkel des Strahles l von seinem Abstandspunkte nach zwei beliebigen Punkten B_1, B_2, deren Abscissen r_1 und r_2 sein mögen, so folgt aus (1.)

$$(3.)\qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{r_1-r}{r_2-r} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2},$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Längen der Strecken AB_1 und AB_2 sind.

Sind zunächst B_1, B_2 conjugirte Punkte, π_1 und π_2 ihre Abstände, so folgt aus (19^b.), § 3:

$$(4.)\qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}(\pi\pi_1)}{\operatorname{tg}(\pi\pi_2)} = \frac{r_1-r}{r_2-r}.$$

Die Tangenten der Drehungswinkel α_1 und α_2 vom Abstandspunkte A eines beliebigen Strahles bis zu zwei conjugirten Punkten B_1, B_2 des Mittelstrahles verhalten sich also einmal wie die Tangenten der Winkel, welche die Abstandsrichtung in A mit den conjugirten Abstandsrichtungen in B_1 und B_2 bildet, und ferner wie die Entfernungen des Punktes A von B_1 und B_2.

Aus (4.) ergiebt sich die der in (19.) des vorigen Paragraphen gegebenen ganz analoge Gleichung:

$$(4^a.)\qquad r\sin(\alpha_2-\alpha_1) = r_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - r_2\cos\alpha_2\sin\alpha_1,$$

welche die Abscisse eines beliebigen Strahles aus den Drehungswinkeln desselben von seinem Abstandspunkte bis zu irgend zwei gegebenen conjugirten Punkten B_1 und B_2 berechnen lehrt.

Sind B_1B_2 aber keine conjugirten Punkte, so folgt aus (3.):

$$(5.)\qquad \frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2+\alpha_1)} = \frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_2+\varrho_1}.$$

Sind $B'_1B'_2$ die zu B_1B_2 in Bezug auf den Abstandspunkt A symmetrisch liegenden Punkte des Mittelstrahls, so erhält man durch geeignete Interpretation von (5.) die Gleichungen:

$$(6.)\qquad \frac{B_1B_2}{\sin(\overline{B_1B_2})} = \frac{B_1B'_2}{\sin(\overline{B_1B'_2})} = \frac{B'_1B_2}{\sin(\overline{B'_1B_2})} = \frac{B'_1B'_2}{\sin(\overline{B'_1B'_2})}.$$

Für einen jeden Strahl l bleibt demnach das Verhältniss einer beliebigen Strecke B_1B_2 zum Sinus ihres Drehungswinkels $(\overline{B_1B_2})$

ungeändert, wenn man hierin für einen ihrer Endpunkte den zu ihm in Bezug auf den Abstandspunkt A symmetrisch liegenden Punkt setzt.

Geht man auf dem Mittelstrahle vom Abstandspunkt eines jeden Nachbarstrahles l aus um eine solche Strecke ϱ fort, dass der Drehungswinkel des Strahles für diese Strecke einen vorgeschriebenen Werth α erhält, so bestimmt sich nach (1^a.) ϱ aus $\operatorname{tg}\alpha$ durch die Gleichung:

$$\varrho - \bar{\sigma}\operatorname{tg}\alpha + \bar{\sigma}_b \operatorname{tg}\alpha = 0$$

oder nach (2^b.), § 3 und der Bezeichnung von (17.), § 3

$$\varrho - \bar{\sigma}_0 \operatorname{tg}\alpha \cos\gamma + \operatorname{tg}\alpha\, \bar{\sigma}_b = 0.$$

Denkt man sich dieselbe Gleichung für drei beliebige Nachbarstrahlen $l l_1 l_2$ aufgestellt, so ergiebt sich ähnlich wie in (17.), § 3 die Identität:

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} \varrho & \cos\gamma & 1 \\ \varrho_1 & \cos\gamma_1 & 1 \\ \varrho_2 & \cos\gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und die Entwickelung ergiebt eine der dort unter (18^a.) angegebenen ganz analoge Formel. Ist speciell $l_2 = l_1'$ der zu l_1 entgegengesetzte Strahl, also $\bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}_1$, so erhält man die einfache Relation:

$$(8.)\qquad \varrho \cos(\pi_1 \pi_2) = \varrho_1 \cos(\pi\pi_1)\cos(\pi\pi_2) + \varrho_1' \sin(\pi\pi_1)\sin(\pi\pi_2).$$

Wählt man für l_1 und l_1' die beiden entgegengesetzten Mittelabstandsstrahlen, so fallen die beiden conjugirten Abstandsrichtungen π_1 und π_2 zusammen, es wird also $(\pi_1\pi_2) = 0$. Setzt man $(\pi\pi_1) = \omega$, so erhält man die der *Hamilton*schen (No. 20, § 3) entsprechende Formel:

$$(9.)\qquad \varrho = \varrho_1 \cos^2\omega + \varrho_1' \sin^2\omega,$$

aus der sich zugleich ergiebt, dass für die entgegengesetzten Mittelabstandsstrahlen ϱ seinen grössten, beziehungsweise kleinsten Werth erhält.

§ 5.

Untersuchung der durch ein unendlich dünnes Strahlenbündel senkrecht zum Mittelstrahl geführten ebenen Schnitte.

Es sei ein beliebiges unendlich dünnes Strahlenbündel S mit dem Mittelstrahle L gegeben. Es möge S durch eine beliebige Ebene G geschnitten werden; der Schnittpunkt O derselben mit dem Mittelstrahle soll

die Abscisse R haben. Denkt man sich dann in G ein beliebiges Coordinatensystem gegeben, dessen Anfangspunkt in O liegt, und bezeichnet die Coordinaten des Schnittpunktes A eines beliebigen Nachbarstrahles l mit G für dasselbe durch x und y, so wird man für diese bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung die folgenden Gleichungen erhalten:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = a du + b dv, \\ y = c du + d dv, \end{cases}$$

wo du und dv die dem Strahle l entsprechenden Incremente, $abcd$ Coefficienten bedeuten, welche allein von der Lage der schneidenden Ebene und dem gewählten Coordinatensystem abhängen. Sind P, Q beliebige homogene lineare Functionen von du, dv mit nicht verschwindender Determinante, so ergeben sich aus (1.) die allgemeineren Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} x = \alpha P + \beta Q, \\ y = \gamma P + \delta Q. \end{cases}$$

Verschwindet die Substitutionsdeterminante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ für irgend eine Lage der Ebene G, so schneidet dieselbe das Strahlenbündel in einer durch O gehenden geraden Linie, und dieser Fall kann auch nur unter jener Bedingung eintreten. Denkt man sich das Strahlenbündel durch eine zweite beliebige Ebene G_0 durchschnitten, welche L in O_0 trifft, und nennt $x_0 y_0$ die Coordinaten des Schnittpunktes l mit G_0 in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte O_0, so wird man ein ähnliches Gleichungssystem erhalten:

$$(3.)\quad \begin{cases} x_0 = \alpha_0 P + \beta_0 Q, \\ y_0 = \gamma_0 P + \delta_0 Q. \end{cases}$$

Ist $(\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0) \gtrless 0$, so giebt es eine Substitution

$$(4.)\quad \begin{cases} x = A x_0 + B y_0, \\ y = C x_0 + D y_0, \end{cases} \qquad (AD - BC) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0},$$

welche (xy) in $(x_0 y_0)$ überführt. Denkt man sich jetzt auf G_0 eine unendlich kleine den Punkt O_0 umgebende Curve gezogen, welche eine unendlich kleine Fläche J_0 einschliesst, und nennt man J den Inhalt der entsprechenden kleinen Fläche in G, so folgt, falls die Coordinatenaxen in G und G_0 denselben Winkel einschliessen, aus (4.) bekanntlich die Gleichung:

$$(5.)\qquad \frac{J}{J_0} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0} = AD-BC.$$

Sind die Ebenen G und G_0 einander parallel, und lässt man die umgebenden Curven sich mehr und mehr den Punkten O und O_0 mit den Abscissen R und R_0 nähern, so verhalten sich die Dichtigkeiten $D(R)$, $D(R_0)$ des Strahlenbündels in O und O_0 umgekehrt wie die Inhalte J und J_0, und man erhält daher aus (5.):

$$(6.)\qquad \frac{D(R_0)}{D(R)} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0}.$$

Es seien nun $l_1 l'_1$ zwei beliebige aber fest gewählte entgegengesetzte Strahlen, deren Abstandsrichtungen $\pi_1\pi'_1$ die X- und Y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems in G bestimmen und die deshalb der erste, beziehungsweise zweite Axenstrahl genannt werden sollen. Es sollen $r_1 r_2$ die (einander conjugirten) Abscissen von $l_1 l'_1$ und p_1, q_1, π_1, $\bar{\sigma}_1$, $d\varepsilon_1$ ihre übrigen Bestimmungsstücke sein. Sind dann π, p, q, $\bar{\sigma}$, $d\varepsilon$ die entsprechenden Grössen für den Strahl l, dessen Durchschnitts-Coordinaten xy in Bezug auf dieses Coordinatensystem zu finden sind, so sind nach (1.), § 3 die beiden Grössen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} d\varepsilon\sin(\pi\pi_1) = \dfrac{pq_1-qp_1}{d\varepsilon_1}, \\ d\varepsilon\cos(\pi\pi_1) = \dfrac{pp_1+qq_1}{d\varepsilon_1} \end{cases}$$

homogene lineare Functionen von p und q mit der Determinante $+1$; dieselben können also in (2.) an Stelle von P und Q gesetzt werden. Die Coefficienten in den dann sich ergebenden Gleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{d\varepsilon} = A\cos(\pi\pi_1)+B\sin(\pi\pi_1), \\ \dfrac{y}{d\varepsilon} = C\cos(\pi\pi_1)+D\sin(\pi\pi_1) \end{cases}$$

bestimmen sich leicht dadurch, dass man den zu untersuchenden Strahl l mit dem ersten, beziehungsweise zweiten Axenstrahle zusammenfallen lässt. Dadurch ergeben sich für die vier Substitutionscoefficienten mit Hülfe von (12.), § 2 und (1.), § 4 die folgenden Ausdrücke:

$$A = (\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_b),\quad B = -(R-r_2),$$
$$C = (R-r_1),\quad D = -(\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_b).$$

Setzt man also den Winkel $(\pi\pi_1)$, welchen die Abstandsrichtung von l mit der Abstandsrichtung des ersten Axenstrahles bildet, gleich φ; so folgt aus (8.):

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{d\varepsilon} = (\bar\sigma_1-\bar\sigma_b)\cos\varphi-(R-r_2)\sin\varphi, \\ \dfrac{y}{d\varepsilon} = (R-r_1)\cos\varphi-(\bar\sigma_1+\bar\sigma_b)\sin\varphi, \end{cases}$$

und eine kurze Ueberlegung ergiebt, dass diese Gleichungen für die beiden möglichen Lagen des zweiten Axenstrahles ihre Geltung behalten.

Aus diesen sehr allgemeinen Formeln fliessen unmittelbar solche, durch die die Coordinaten $\xi\eta$ des Durchschnittspunktes in Bezug auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem ausgedrückt werden, dessen Axenrichtungen diejenigen irgend zweier conjugirten Abstände π_1 und π_2 sind. In der That ergiebt sich aus der zweiten Gleichung von (9.) sofort:

$$(10.)\quad \begin{cases} \xi\cdot\dfrac{\sin(\pi_2\pi_1)}{d\varepsilon} = (R-r_2)\cos(\pi_2\pi)-(\bar\sigma_1+\bar\sigma_b)\sin(\pi_2\pi_1), \\ \eta\cdot\dfrac{\sin(\pi_1\pi_2)}{d\varepsilon} = (R-r_1)\cos(\pi_1\pi)-(\bar\sigma+\bar\sigma_b)\sin(\pi_1\pi_2). \end{cases}$$

Die Determinante der Substitution (9.), deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Brennlinien ist, verwandelt sich nach (9.), § 3 in:

$$(11.)\quad \bar\sigma_b^2-\bar\sigma_1^2+(R-r_1)(R-r_2) = \bar\sigma_b^2-\bar\sigma_R^2 = +(R-\varrho_1)(R-\varrho_2),$$

wenn $\bar\sigma_R$ der zu $x = R$ gehörige Werth von $\frac{\sigma}{\tau}$ ist, während $\varrho_1\varrho_2$ die Abscissen der beiden Brennpunkte bedeuten.

> Die ebenen senkrechten Schnitte eines Strahlenbündels in den Brennpunkten und in diesen allein sind also unendlich kleine auf dem Mittelstrahle senkrecht stehende gerade Linien.

Um die Richtung der beiden Brennlinien festzustellen, nehme man in (10.) für die conjugirten Axenrichtungen diejenigen der beiden Fokalebenen F_1F_2 an. Dann wird

$$\bar\sigma_1 = -\bar\sigma_b,\quad r_2 = \varrho_1,\quad r_1 = \varrho_2,$$

und man erhält für einen beliebigen senkrechten Schnitt die einfachen Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{cases} -\xi\dfrac{\sin(F_1F_2)}{d\varepsilon} = (R-\varrho_1)\cos(F_2\pi), \\ +\eta\dfrac{\sin(F_1F_2)}{d\varepsilon} = (R-\varrho_2)\cos(F_1\pi). \end{cases}$$

Sind $(\xi_{\varrho_1}\eta_{\varrho_1})$, $(\xi_{\varrho_2}\eta_{\varrho_2})$ die Durchschnittscoordinaten von l mit den durch den ersten, beziehungsweise zweiten Brennpunkt senkrecht zum Mittelstrahl gelegten Ebenen, so folgt aus (12.) und aus (3.), § 3:

$$(13.)\quad \begin{cases} \xi_{\varrho_1} = 0, & \eta_{\varrho_1} = -2\bar{\sigma}_0 d\varepsilon \cos(F_1\pi), \\ \xi_{\varrho_2} = -2\bar{\sigma}_0 d\varepsilon \cos(F_2\pi), & \eta_{\varrho_2} = 0. \end{cases}$$

Die Querschnitte des Bündels in dem ersten, beziehungsweise zweiten Brennpunkte sind also unendlich kleine gerade Linien, welche in der zweiten, beziehungsweise ersten Fokalebene liegen.

Aus (20.) ergiebt sich die Gleichung:

$$(14.)\quad \frac{\xi_{\varrho_2}}{\eta_{\varrho_1}} = \frac{\cos(F_2\pi)}{\cos(F_1\pi)}.$$

Die senkrechten Abstände eines beliebigen Nachbarstrahles l von den beiden Brennpunkten verhalten sich also wie die Cosinus der Winkel, welche seine Abstandsrichtung mit den beiden entsprechenden Fokalebenen bildet.

Ferner folgt aus (13.), dass von allen Nachbarstrahlen, deren Neigung gegen den Mittelstrahl dieselbe ist, diejenigen den grössten Abstand von dem ersten, beziehungsweise zweiten Brennpunkte haben, welche den Brennstrahlen entgegengesetzt sind. Die Länge der beiden Brennlinien eines Strahlenbündels gleicher Neigung ist somit gleich:

$$4\bar{\sigma}_0 d\varepsilon,$$

und sie werden durch die Brennpunkte halbirt. Die Brennlinien werden offenbar dann und nur dann unendlich klein von einer höheren als der ersten Ordnung, wenn $\bar{\sigma}_0 = 0$ ist; wenn also nur einem verschwindenden Coordinatenquotienten $\bar{\sigma}_1$ reale Nachbarstrahlen entsprechen. In diesem Falle fallen alle conjugirten Abstandspunkte, also hier auch die Brennpunkte im Mittelpunkte M zusammen. Nimmt man diesen als Anfangspunkt an, so verwandeln sich die Gleichungen (9.) in:

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{d\varepsilon} = -\bar{\sigma}_b \cos\varphi - R\sin\varphi, \\ \dfrac{y}{d\varepsilon} = R\cos\varphi - \bar{\sigma}_b \sin\varphi. \end{cases}$$

Alle Nachbarstrahlen, welche dieselbe Neigung $d\varepsilon$ gegen L haben, liegen alsdann auf dem einschaligen Rotationshyperboloid:

$$\frac{1}{d\varepsilon^2}(x^2+y^2) - R^2 = \bar{\sigma}_b^2.$$

Ein solches Strahlenbündel lässt sich somit in eine Schaar von Rotationshyperboloiden zusammenfassen. Hat dasselbe, wie soeben vorausgesetzt wurde, reale Brennpunkte, ist also $\bar{\sigma}_b = 0$, so bilden alle seine Strahlen eine Schaar von Kreiskegeln, deren Gleichung:

$$x^2+y^2 = R^2 d\varepsilon^2$$

ist. Ein Strahl L, dessen sämmtliche Nachbarstrahlen durch seinen Mittelpunkt gehen, wird ein ***Hauptstrahl*** genannt. Die Hauptstrahlen sind also durch die Gleichungen:

$$(16.)\qquad \bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_b = 0$$

definirt.

Denkt man sich das Bündel S durch eine zweite der ersten parallele Ebene G_0 an einer anderen Stelle des Mittelstrahles, deren Abscisse R_0 sein mag, durchschnitten, und wählt man das Coordinatensystem für G dem für G parallel, so sind die Durchschnittscoordinaten $x_0\, y_0$ des Strahles l mit der Ebene G_0 durch die Gleichungen:

$$(17.)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{d\varepsilon} = (\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_b)\cos\varphi-(R_0-r_2)\sin\varphi, \\[2ex] \dfrac{y_0}{d\varepsilon} = (R_0-r_1)\cos\varphi-(\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_b)\sin\varphi \end{cases}$$

gegeben. Nach (6.) und (11.) ergiebt sich für das Verhältniss der Dichtigkeit des Bündels in den Punkten R und R_0 die Gleichung:

$$(18.)\qquad \frac{D(R)}{D(R_0)} = \frac{\bar{\sigma}_b^2-\bar{\sigma}_{R_0}^2}{\bar{\sigma}_b^2-\bar{\sigma}_R^2} = \frac{(R_0-\varrho_1)(R_0-\varrho_2)}{(R-\varrho_1)(R-\varrho_2)}.$$

Die Dichtigkeiten eines Strahlenbündels an zwei beliebigen Stellen des Mittelstrahles verhalten sich also umgekehrt wie die Rechtecke aus den Entfernungen jener Punkte von den Brennpunkten.

Das absolute Dichtigkeitsmass, welches Herr *Kummer* in seiner Arbeit definirt, kann man so auffassen, dass dem zu untersuchenden Bündel ein Hauptstrahlenbündel zugeordnet wird, und das kleine Flächenstück E bei R mit dem ihm entsprechenden $\bar{E}$ verglichen wird, welches von dem Hauptstrahlenbündel aus einer um seinen Mittelpunkt beschriebenen Einheitskugel ausgeschnitten wird. Für dieses Bündel ist dann nach (16.):

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_b = 0, \quad R-r_1 = R-r_2 = 1,$$

und die Durchschnittscoordinaten $\bar{x}_0\, \bar{y}_0$ des dem Strahle l parallelen Strahles

$\bar{l}$ mit jener Kugeloberfläche sind daher nach (17.) durch die Gleichungen:

$$\frac{\bar{x}_0}{d\varepsilon} = -\sin\varphi, \quad \frac{\bar{y}_0}{d\varepsilon} = \cos\varphi$$

gegeben, also ergiebt sich für das Dichtigkeitsmass $D(R)$ die Gleichung:

$$(19.) \qquad D(R) = \frac{1}{\bar{\sigma}_b^2 - \bar{\sigma}_R^2} = \frac{1}{(R-\varrho_1)(R-\varrho_2)} = \frac{\bar{E}}{E}.$$

Da der Anfangspunkt des Mittelstrahles völlig beliebig gewählt worden war, so kann die Ebene G_0 unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung als durch diesen Punkt hindurchgehend angenommen werden. Dann verwandeln sich die Gleichungen (9.) in:

$$(20.) \qquad \begin{cases} \frac{x_0}{d\varepsilon} = (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_b)\cos\varphi + r_2\sin\varphi, \\ \frac{y_0}{d\varepsilon} = -r_1\cos\varphi - (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_b)\sin\varphi. \end{cases}$$

Es werde jetzt nach der Grösse des Drehungswinkels β des Strahles l vom Anfangspunkt aus bis zur Ebene G gefragt.

Es ist:

$$(21.) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{yx_0 - xy_0}{xx_0 + yy_0} = \frac{R(x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi)}{(x_0^2 + y_0^2) - R(x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi)}.$$

Denkt man sich nun mit Hülfe von (20.) $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch x_0 und y_0 ausgedrückt, so ergiebt sich zur Bestimmung von $\frac{1}{R}$ eine Gleichung von der Form:

$$(22.) \qquad \frac{1}{R} = \frac{Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = A\cos^2\psi + B\cos\psi\sin\psi + C\sin^2\psi,$$

wenn

$$x_0 = q_0\cos\psi, \quad y_0 = q_0\sin\psi$$

gesetzt werden, q_0 und ψ also die Polarcoordinaten von $x_0 y_0$ in der Ebene G_0 sind. Die Coefficienten A, B, C hängen in einfacher Weise von der Grösse von β und von der Wahl des Coordinatensystemes ab. Die Formel (22.) lehrt also zu einem gegebenen Werthe von β für einen beliebigen Nachbarstrahl l die Abscisse R, d. h. diejenige Länge finden, um welche man von dem beliebig gewählten Anfangspunkte aus auf dem Mittelstrahle fortschreiten muss, damit der Drehungswinkel von l in Bezug auf L eine vorgeschriebene Grösse β erhalte.

Man kann nun, wie gleich näher gezeigt werden soll, für einen jeden Werth von β das Coordinatensystem so wählen, dass der Coefficient B

verschwindet. Dann werden aber A und C in (22.) dem grössten, beziehungsweise kleinsten Werthe gleich werden, welchen $\frac{1}{R}$ überhaupt annehmen kann. Bezeichnet man diese mit $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$, so ergiebt sich die merkwürdige von Herrn *Kummer* schon auf anderem Wege abgeleitete Formel:

$$(23.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\psi}{R_1}+\frac{\sin^2\psi}{R_2},$$

wo ψ derjenige Winkel ist, welchen der Radiusvector q_0 mit der entsprechenden Linie q_1 desjenigen Nachbarstrahles bildet, für welchen R gleich R_1 ist.

Zur Bestimmung der Abstandsrichtungen der dem grössten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{R}$ entsprechenden Nachbarstrahlen führt die Discussion der Bedingungsgleichung $B=0$, welche folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(r_2-r_1)\cos\beta+2\bar{\sigma}_1\sin\beta = 0,$$

und hieraus folgt mit Hülfe von (2.) und (3.) § 3:

$$\beta = (\pi_2\pi_1).$$

Bezeichnet man also mit π_0, π_0' die beiden Mittelabstandsrichtungen, so liegen die Hauptrichtungen π_1, π_1' vom Anfangspunkte des Mittelstrahles aus gesehen so, dass:

$$(24.)\quad \pi_0\pi_1 = \frac{\beta}{2} = \pi_0'\pi_1'$$

ist.

In dem speciellen Falle, wo der Drehungswinkel β gleich einem Rechten ist, fallen also die Hauptrichtungen mit denjenigen der Grenzabstände zusammen; es ist also in (20.) $\bar{\sigma}_1=0$, r_1, r_2 beziehlich gleich $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ zu setzen. Die dann aus (21.) sich ergebende Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{x_0\sin\varphi-y_0\cos\varphi}{x_0^2+y_0^2}$$

verwandelt sich dadurch in:

$$(25.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\bar{r}_1}{\varrho_1\varrho_2}\cos^2\psi+\frac{\bar{r}_2}{\varrho_1\varrho_2}\sin^2\psi.$$

Die Richtungen der Anfangspunkte derjenigen Strahlen, denen der grösste, beziehungsweise kleinste Werth von $\frac{1}{R}$ zukommt, fallen

also in diesem Falle mit den Richtungen der Grenzabstände zusammen, und diese Werthe $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ verhalten sich wie die Entfernungen des Anfangspunktes von den Grenzpunkten, und sie haben endlich gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem der Anfangspunkt ausserhalb oder innerhalb der Grenzpunkte liegt.

§ 6.

Die Strahlenbündel gleicher Neigung. Die durch ein Bündel geführten schiefen Schnitte. Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Normalenbündel.

Denkt man sich ein beliebiges Strahlenbündel gleicher Neigung in dem beliebig gewählten Anfangspunkte des Mittelstrahls senkrecht zu dem letzteren durchschnitten und setzt für einen beliebigen Begrenzungsstrahl desselben

$$\frac{x_0}{d\varepsilon} = X, \quad \frac{y_0}{d\varepsilon} = Y,$$

so erhält man aus (20.) § 5 durch Auflösung nach $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Gleichung:

$$(1.) \quad \varrho_1^2\varrho_2^2 = ((\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_b)^2+r_2^2)X^2-2(\bar{\sigma}_1(r_2+r_1)+\bar{\sigma}_b(r_2-r_1))XY+((\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_b)^2+r_1^2)Y^2.$$

Jeder senkrechte Durchschnitt durch ein Strahlenbündel gleicher Neigung ist also eine Ellipse.

Die Hauptaxen dieser Ellipsen fallen dann mit den Coordinatenaxen zusammen, wenn der Coefficient des mittleren Gliedes in (1.) verschwindet. Nennt man π_1 und π_2 die Richtung der ersten Hauptaxe und die zu ihr conjugirte Richtung, so folgt, wenn $\bar{\sigma}_b \gtrless 0$ ist, aus dieser Bedingung:

$$(2.) \quad \mathrm{tg}(\pi_1\pi_2) = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_2}\mathrm{tg}(\pi_b\pi_{b'}),$$

und hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$(3.) \quad \frac{\sin 2(\pi_1 F_1)}{\sin 2(\pi_1 F_2)} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Für einen beliebigen senkrechten Schnitt durch ein Strahlenbündel gleicher Neigung verhalten sich also die Sinus der doppelten Winkel, welche eine Hauptaxenrichtung mit den beiden Fokalebenen bildet, umgekehrt wie die Entfernungen der Schnittpunkte von den beiden Brennpunkten.

Ist dagegen $\bar{\sigma}_b = 0$, ein Fall, welcher dann und nur dann auftritt, wenn S ein Normalenbündel ist, so folgt aus der vorher erwähnten Bedingung:

$$\bar{\sigma}_1 = 0.$$

Für die Schnittellipsen eines Normalenbündels gleicher Neigung sind also die Hauptaxenrichtungen stets dieselben, nämlich diejenigen der Abstände in den beiden Grenzpunkten.

Denkt man sich die Gleichung (1.) bereits auf ihre Normalform gebracht, so verhalten sich die Hauptaxenquadrate wie r_2^2 zu r_1^2.

Die Hauptaxen der Ellipse, welche durch einen senkrecht zum Mittelstrahle geführten Schnitt durch ein Strahlenbündel gleicher Neigung erhalten wird, verhalten sich also wie die Abstände des Durchschnittspunktes von denjenigen beiden conjugirten Punkten, deren eine Abstandsrichtung einer Hauptaxenrichtung parallel ist.

Es werde das Strahlenbündel S an einer und derselben Stelle des Mittelstrahles durch zwei Ebenen G und G' einmal senkrecht zu demselben, das andere Mal unter einem beliebigen aber endlichen Winkel durchschnitten, und es seien A und A' die Schnittpunkte eines beliebigen Nachbarstrahles l mit G und G'. Errichtet man dann in A auf G ein Loth, welches G' in $\bar{A}$ schneidet, so wird die Strecke $A'\bar{A}$ unendlich klein von einer höheren als der ersten Ordnung sein, da sie in dem unendlich kleinen Dreieck $AA'\bar{A}$ dem unendlich kleinen Winkel $A'A\bar{A} = d\varepsilon$ gegenüberliegt. Da aber in der ganzen Theorie der Strahlenbündel, wie sie hier gegeben wurde, unendlich kleine Grössen von höherer als der ersten Ordnung nicht berücksichtigt werden, so erhält man den Satz:

Denkt man sich ein beliebig begrenztes Strahlenbündel durch zwei durch denselben Punkt des Mittelstrahles gehende Ebenen G und G' einmal senkrecht zum Mittelstrahl, das andere Mal unter beliebigem Winkel mit demselben durchschnitten, so fällt die zweite Durchschnittsfigur mit derjenigen zusammen, welche eine auf der Grenzcurve der ersten Figur parallel zum Mittelstrahle fortgeführte Gerade aus der Ebene G' ausschneidet.

Wendet man diesen Satz auf die schiefen Schnitte in einem der beiden Brennpunkte an, so ergiebt sich:

Eine jede durch den ersten (zweiten) Brennpunkt eines beliebigen Strahlensystems gehende und in der zweiten (ersten) Fokal-

ebene liegende unendlich kleine Gerade ist eine Brennlinie des Strahlensystemes, und diese sind die einzigen Brennlinien, welche ein Strahlenbündel hat.

Durch diese Ueberlegungen erledigen sich in einfachster Weise die Einwände, welche in neuester Zeit gegen die *Kummer*sche Theorie gemacht worden sind, und welche für den Fall eines Normalenbündels von Herrn *Weingarten* (Bd. 98 dieses Journals) bereits auf anderem Wege widerlegt worden sind. Der letzte Satz ist a. a. O. allgemein ausgesprochen und für den Fall eines Normalenbündels bewiesen.

Als Abschluss dieser Arbeit sollen noch einige Sätze über die Normalen eines Oberflächenelementes angegeben werden, welche sich aus den bis jetzt gefundenen Resultaten durch Specialisirung ableiten lassen und die sich in der *Kummer*schen Theorie noch nicht finden.

Wie a. a. O. bewiesen wird, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Strahlenbündel das System der Normalen eines Oberflächenelementes ist, die, dass nach der hier gegebenen Bezeichnungsweise σ_b gleich Null ist, dass also die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammenfallen und die Fokalebenen auf einander senkrecht stehen. Setzt man zunächst in der Gleichung (15.) § 3 $\bar{\sigma}_b = 0$, so lässt sich ihr Inhalt folgendermassen aussprechen:

In jedem Normalenbündel haben entgegengesetzte Normalen entgegengesetzte Neigung gegen die Mittelnormale.

Für das durch den Anfangspunkt der Mittelnormale hindurchgehende, zu dem Bündel gehörige Flächenelement dw sind die Grenz- oder Brennpunktsabscissen die Hauptkrümmungsradien, die Fokalebenen die auf einander senkrecht stehenden Hauptnormalenebenen, und die über die Abstandsrichtungen verbundener und entgegengesetzter Strahlen gefundenen Sätze lassen sich hier folgendermassen aussprechen:

Durch einen beliebigen, innerhalb der Hauptkrümmungsmittelpunkte liegenden Punkt der Mittelnormale sind stets vier kürzeste Abstandsrichtungen von Nachbarnormalen bestimmt, welche symmetrisch zu den Hauptnormalenebenen liegen. Die zu zwei conjugirten Punkten der Mittelnormale gehörigen acht Abstandsrichtungen liegen symmetrisch zu denjenigen Ebenen, welche die von den Hauptnormalenebenen gebildeten Winkel halbiren.

Denkt man sich ein beliebiges Normalenbündel senkrecht zur Mittel-

normale durch eine Ebene G geschnitten, und wählt man als Axenrichtungen innerhalb G die der Hauptnormalenebenen, so ist in den die Durchschnittscoordinaten xy eines Nachbarstrahles l mit G bestimmenden Gleichungen (9.) des § 5 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_6 = 0$ zu setzen; hierdurch nehmen dieselben die einfache Gestalt an:

$$(4.)\quad \begin{cases} -\dfrac{x}{d\varepsilon} = (R-\varrho_2)\sin\varphi, \\ \dfrac{y}{d\varepsilon} = (R-\varrho_1)\cos\varphi. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort der allgemeine von Herrn *Kummer* a. a. O. § 9 bewiesene Satz. Bezeichnet man ferner mit x_{ϱ_1}, y_{ϱ_2} die senkrechten Abstände der Nachbarnormale l von den beiden Krümmungsmittelpunkten, so folgt aus (4.)

$$(5.)\quad \frac{x_{\varrho_1}}{y_{\varrho_2}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Das Verhältniss dieser beiden Abstände ist also gleich der Tangente desjenigen Winkels, welchen die zu l gehörige Abstandsrichtung mit der ersten Hauptnormalenebene bildet.

Endlich ergiebt sich aus dieser Gleichung die folgende:

$$(6.)\quad \left(\frac{x}{R-\varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{R-\varrho_1}\right)^2 = d\varepsilon^2.$$

Diejenigen Nachbarnormalen, welche mit der Mittelnormale denselben Winkel $d\varepsilon$ bilden, sind also die Erzeugenden einer geradlinigen Fläche, welche von jeder senkrecht zur Mittelnormale liegenden Ebene in Ellipsen geschnitten werden. Die Hauptaxen der Ellipsen liegen stets in den beiden Hauptnormalenebenen, und sie verhalten sich zu einander wie die Entfernungen des Schnittpunktes von den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten.

Berlin, im Mai 1887.

Zur Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Variabeln.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundlagen der Untersuchung.

§ 1.

Für die vorliegenden Betrachtungen ist es von Vortheil, Bezeichnungen einzuführen, welche gestatten, an Stelle einzelner Gleichungen ganze Gruppen solcher gemeinsam aufzufassen, sodass jede beliebige unter ihnen zugleich das ganze System repräsentirt. Die Möglichkeit hierzu ist durch die Theorie der Charakteristiken gegeben, namentlich durch einen von Herrn *Frobenius* bewiesenen Satz, den wir wegen seiner grossen Bedeutung für die hier behandelten Fragen noch besonders erörtern wollen. Die Angabe der Charakteristik werden wir indes zur Bezeichnung der Functionen und der halben Perioden nicht verwenden, sondern in möglichst allgemeiner Weise Indices einführen. Diese können beliebig combinirt werden; die Reihenfolge der Elemente ist gleichgültig, und zwei gleiche Elemente heben sich gegenseitig auf. Es ist ferner nöthig, für Functionen und Perioden verschiedene Indices zu wählen, wenn man nicht eine der betrachteten Functionen vor den übrigen bevorzugen will. Aber es besteht doch eine Beziehung zwischen dem System der Functionen und dem der halben Perioden, die sich auch in der Bezeichnung aussprechen muss. Wir werden, wenn wir die Indices verschiedener Functionen combiniren, diese Combination nur dann zur Bezeichnung einer neuen Function anwenden, wenn ihre Ordnung, d. h. die Anzahl der Elemente, eine ungerade Zahl ist; im anderen Fall ist sie der Index einer halben Periode. —

Wir verstehen, indem wir der *Weierstrass*schen Definition folgen,

unter

$$\Theta(u_1, \dots u_\varrho; \mu, \nu)$$

die von ϱ Argumenten $u_1, \dots u_\varrho$ und 2ϱ Parametern $(\mu_1, \dots \mu_\varrho, \nu_1, \dots \nu_\varrho) = (\mu, \nu)$ abhängige Function

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(n)} \left\{ e^{G(u_1, \dots u_\varrho;\, n_1+\nu_1, \dots n_\varrho+\nu_\varrho) + 2\pi i \sum_{a=1}^{\varrho} \mu_a(n_a+\nu_a)} \right\},$$

wo G einen homogenen quadratischen Ausdruck der 2ϱ Grössen u und $n+\nu$ bedeutet. Man bekommt alle geraden und ungeraden Functionen des Systems, indem man den 2ϱ Parametern μ, ν, welche die Charakteristik einer jeden Function bilden, solche Werthe beilegt, welche die Hälften ganzer Zahlen sind:

$$\mu_a = \tfrac{1}{2}\delta_a, \quad \nu_a = \tfrac{1}{2}\varepsilon_a \qquad (a = 1, 2, \dots \varrho);$$

und zwar genügt es, für jedes ε die Werthe 0 oder 1, für jedes δ die Werthe 0 oder -1 anzunehmen. Man könnte auch jedes δ als 0 oder $+1$ wählen; die Bezeichnung bliebe aber dann nicht ganz in Uebereinstimmung mit der für elliptische Theta geltenden.

Dadurch ist ein System von 4^ϱ Functionen definirt, die zum Theil gerade, zum Theil ungerade sind, und die bei der Vermehrung der Argumente um bestimmte Grössensysteme, die Perioden, sich nur um Exponentialfactoren ändern. Der Quotient zweier Theta ändert dabei nur sein Zeichen. Das Quadrat desselben bleibt also ungeändert, und ist demnach eine *Abel*sche Function. Wir denken uns die 4^ϱ Theta durch Indices, wie k, l, m etc. unterschieden. Wenn $\Theta_k, \Theta_l, \Theta_m$ irgend drei Functionen des Systems sind, so existirt in demselben auch eine ganz bestimmte, Θ_n, sodass der Quotient

$$\frac{\Theta_k \Theta_l}{\Theta_m \Theta_n} = \Phi(u_1, \dots u_\varrho)$$

eine *Abel*sche Function ist. Wir setzen dann $n = klm$, bezeichnen also diese vierte Function als Θ_{klm}, wobei offenbar in der Combination klm die Elemente vertauscht werden dürfen. Ist $k = l$, so ist $klm = m$.

Die eben definirte *Abel*sche Function Φ kann entweder eine gerade oder eine ungerade sein. Im ersten Falle nennen wir die drei Functionen $\Theta_k, \Theta_l, \Theta_m$, einer von Herrn *Frobenius* eingeführten Bezeichnung entsprechend, syzygetisch, im andern azygetisch.

Ebenso kann man, wenn fünf Functionen

$$\Theta_k, \quad \Theta_l, \quad \Theta_m, \quad \Theta_n, \quad \Theta_p$$

gegeben sind, unter Θ_{klmnp} dasjenige Θ_r verstehen, wofür

$$\frac{\Theta_k\Theta_l\Theta_m}{\Theta_n\Theta_p\Theta_r}$$

eine *Abel*sche Function ist, u. s. f. Jeder Combination ungerader Ordnung von Thetaindices entspricht auf diese Weise immer wieder ein bestimmtes Θ.

Wir denken uns zweitens ein vollständiges System von 4^ϱ unter einander incongruenten halben Perioden aufgestellt und diese ebenfalls durch Indices K, L, M etc. unterschieden. Zu diesen gehört auch das Werthsystem (0, 0, ... 0), das als halbe Periode 0 bezeichnet werden mag.

Sind K, L die Indices zweier halben Perioden, so bezeichnen wir mit KL diejenige halbe Periode, welche der Summe beider congruent ist. Ferner: ist m der Index einer Thetafunction, K der einer halben Periode, so bezeichnen wir mit mK oder Km diejenige unter den 4^ϱ Thetafunctionen, welche aus Θ_m hervorgeht durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode K. Endlich, wenn k, l zwei Thetaindices sind, so bezeichnet kl diejenige halbe Periode K, welche Θ_k in Θ_l und gleichzeitig Θ_l in Θ_k überführt. — Es können hiernach die Indices der Perioden und Functionen beliebig combinirt werden, jede solche Combination bezeichnet immer entweder eine Function oder eine halbe Periode. Eine Vertauschung der Elemente und die Fortlassung zweier gleichen ist immer erlaubt. — Sehr häufig werden wir die Perioden durch Combinationen von Thetaindices bestimmen. Diese sind dann immer von gerader Ordnung, während eine Thetafunction nie in dieser Weise bezeichnet werden kann, wenn man nicht ein besonderes Element fortlässt.

Führt man in der *Abel*schen Function

$$\frac{\Theta_l\Theta_m}{\Theta_n\Theta_{lmn}} = \Phi(u_1, \dots u_\varrho)$$

an Stelle von l und m die Periodenindices $ln = L$, $mn = M$ ein, so kann man sie jetzt auch in dieser Form schreiben:

$$\frac{\Theta_{nL}\Theta_{nM}}{\Theta_n\Theta_{nLM}} = \Phi.$$

Nimmt man anstatt Θ_n irgend eine andere Function Θ_r und bezeichnet den entsprechenden Ausdruck

$$\frac{\Theta_{rL}\Theta_{rM}}{\Theta_r\Theta_{rLM}} \quad \text{mit} \quad \Psi,$$

so geht Ψ aus Φ hervor, indem man die Argumente um die halbe Periode nr vermehrt:

$$\Phi(u_1+\overset{nr}{\omega}_1, \ldots u_\varrho+\overset{nr}{\omega}_\varrho) = c\Psi(u_1, \ldots u_\varrho),$$

wo c eine Constante bedeutet. Hieraus folgt, dass entweder beide Functionen Φ und Ψ gerade oder beide ungerade sind. Denn ist

$$\Phi(-u_1, \ldots -u_\varrho) = \varepsilon\Phi(u_1, \ldots u_\varrho),$$

so ist

$$c\Psi(-u_1, \ldots -u_\varrho) = \varepsilon\Phi(u_1-\overset{nr}{\omega}_1, \ldots u_\varrho-\overset{nr}{\omega}_\varrho)$$
$$= \varepsilon\Phi(u_1+\overset{nr}{\omega}_1, \ldots u_\varrho+\overset{nr}{\omega}_\varrho),$$

und daher auch:

$$\Psi(-u_1, \ldots -u_\varrho) = \varepsilon\Psi(u_1, \ldots u_\varrho).$$

Es hängt daher nur von den beiden Perioden L, M und nicht von n ab, ob die drei Functionen $\Theta_n, \Theta_{nL}, \Theta_{nM}$ syzygetisch sind oder nicht. Wenn wir demnach den Begriff auf die halben Perioden übertragen, so müssen wir im ersten Fall *die zwei* halben Perioden L, M syzygetisch, im andern azygetisch nennen.

Der Hauptsatz, bekannt aus der Theorie der Charakteristiken, ist nun: Verhalten sich K, L gleichartig zu einer dritten halben Periode M, d. h. sind beide syzygetisch oder beide azygetisch zu M, so ist KL syzygetisch zu M, im andern Falle azygetisch. — Der Satz ergiebt sich übrigens leicht aus den gegebenen Definitionen, wenn man die *Abel*schen Functionen

$$\frac{\Theta_{nK}\Theta_{nM}}{\Theta_n\Theta_{nKM}} = \Phi, \quad \frac{\Theta_{nL}\Theta_{nM}}{\Theta_n\Theta_{nLM}} = \Psi$$

bildet und in dem Quotienten beider nK durch r ersetzt:

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{\Theta_{rKL}\Theta_{rM}}{\Theta_r\Theta_{rKLM}}.$$

Ist K eine von 0 verschiedene halbe Periode, so bilden $(0, K)$ eine Gruppe erster Stufe. Ist L verschieden von 0 und K, so ist $(0, K, L, KL)$ eine Gruppe zweiter Stufe. Ebenso wird, wenn M von diesen vier halben Perioden verschieden ist, durch die acht: $(0, K, L, M, KL, KM, LM, KLM)$ eine Gruppe dritter Stufe gebildet, u. s. f. Jede Gruppe νter Stufe besteht aus 2^ν halben Perioden und kann durch ν derselben repräsentirt werden, aus denen sich die übrigen zusammensetzen lassen. Wir nennen eine solche Gruppe syzygetisch, wenn je zwei derselben angehörige Perioden syzygetisch

sind. Dazu genügt es nach dem Vorangehenden schon, wenn die Repräsentanten zu einander syzygetisch sind. Eine Gruppe erster Stufe muss nothwendig immer als syzygetische betrachtet werden. Es lassen sich auch solche syzygetischen Gruppen aufstellen von der zweiten, dritten etc. bis zur ϱten, aber nicht von höherer Stufe.

§ 2.

Die folgende Untersuchung hat den Zweck, ein Symbol einzuführen, vermöge dessen bei der Aufstellung der algebraischen Gleichungen der Begriff der Charakteristik entbehrlich wird. Wenn man ein Fundamentalsystem von 2ϱ Perioden in der bekannten Art so definirt, wie es der analytischen Darstellung der Functionen unmittelbar entspricht, so gehört nicht nur zu jeder Function, sondern auch zu jeder halben Periode eine bestimmte Charakteristik $(\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\varepsilon)$, und es bestehen die Congruenzen

$$(1.)\qquad \overset{rs}{\delta}_\alpha \equiv \overset{r}{\delta}_\alpha + \overset{s}{\delta}_\alpha, \quad \overset{rs}{\varepsilon}_\alpha \equiv \overset{r}{\varepsilon}_\alpha + \overset{s}{\varepsilon}_\alpha \pmod{2} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho),$$

gleichviel ob r, s Indices von Functionen oder halben Perioden bedeuten. Man kann über die Charakteristiken der halben Perioden dieselbe Voraussetzung machen, wie über die der Functionen: dass jedes $\varepsilon = 0$ oder 1, jedes $\delta = 0$ oder -1 ist. Dann lassen sich die Congruenzen (1.) durch Gleichheiten ersetzen. Wenn nämlich ε, ε', ε'' drei Grössen bedeuten, deren jede 0 oder 1 ist, und zugleich $\varepsilon+\varepsilon' \equiv \varepsilon''$ (mod. 2) ist, so kann $\varepsilon+\varepsilon'-\varepsilon''$ nur 0 oder 2 sein, und zwar letzteres nur dann, wenn ε und ε', also auch $\varepsilon\varepsilon' = 1$ ist. Deswegen ist in jedem Falle $\varepsilon+\varepsilon'-\varepsilon'' = 2\varepsilon\varepsilon'$. Daraus folgt:

$$(2.)\qquad \overset{rs}{\varepsilon}_\alpha = \overset{r}{\varepsilon}_\alpha + \overset{s}{\varepsilon}_\alpha - 2\overset{r}{\varepsilon}_\alpha \overset{s}{\varepsilon}_\alpha, \quad \overset{rs}{\delta}_\alpha = \overset{r}{\delta}_\alpha + \overset{s}{\delta}_\alpha + 2\overset{r}{\delta}_\alpha \overset{s}{\delta}_\alpha.$$

Wenn nun in der Function Θ_m die Argumente vermehrt werden um die Periode K, so geht Θ_m über in Θ_{mK}, multiplicirt mit zwei Factoren. Der eine, E_K, ist eine Exponentialgrösse, die ausser von den Argumenten nur abhängt von der Periode K und deshalb bei der Division fortfällt. Der andere ist eine Potenz von i, deren Exponent von K und m abhängt und durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$(3.)\qquad (K; m) = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \left\{ -\overset{K}{\varepsilon}_\alpha \overset{m}{\delta}_\alpha + \overset{mK}{\varepsilon}_\alpha \left(\overset{m}{\delta}_\alpha + \overset{K}{\delta}_\alpha - \overset{mK}{\delta}_\alpha \right) \right\}.$$

Deswegen geht durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode K

$$(4.)\qquad \frac{\Theta_{nL}\Theta_{nM}}{\Theta_n\Theta_{nLM}} \quad \text{in} \quad i^H \frac{\Theta_{nKL}\Theta_{nKM}}{\Theta_{nK}\Theta_{nKLM}}$$

über, wo H den Ausdruck bedeutet:

$$(5.)\quad H = (K; nL)+(K; nM)-(K; n)-(K; nLM).$$

Diesen haben wir zu vereinfachen; wir können aber, den Gleichungen (2.) zufolge, schon in der definirenden Formel (3.):

$$\overset{m}{\delta}_a+\overset{K}{\delta}_a-\overset{mK}{\delta}_a \quad \text{durch} \quad -2\overset{m}{\delta}_a\overset{K}{\delta}_a$$

ersetzen. Dadurch erhalten wir für H einen Summenausdruck, dessen Glieder theilweise mit $\overset{K}{\varepsilon}_a$, theilweise mit $2\overset{K}{\delta}_a$ multiplicirt sind:

$$(6.)\quad H = \sum_{a=1}^{\varrho}\{\overset{K}{\varepsilon}_a F_a+2\overset{K}{\delta}_a G_a\},$$

und zwar ist

$$(7.)\quad F_a = -\overset{nL}{\delta}_a-\overset{nM}{\delta}_a+\overset{n}{\delta}_a+\overset{nLM}{\delta}_a,$$

$$(8.)\quad G_a = -\overset{nL}{\delta}_a\overset{nLK}{\varepsilon}_a-\overset{nM}{\delta}_a\overset{nMK}{\varepsilon}_a+\overset{n}{\delta}_a\overset{nK}{\varepsilon}_a+\overset{nLM}{\delta}_a\overset{nKLM}{\varepsilon}_a.$$

Nun ist nach (3.):

$$\overset{nL}{\delta}_a = \overset{n}{\delta}_a+\overset{L}{\delta}_a+2\overset{n}{\delta}_a\overset{L}{\delta}_a,$$

$$\overset{nM}{\delta}_a = \overset{n}{\delta}_a+\overset{M}{\delta}_a+2\overset{n}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a,$$

$$\overset{nLM}{\delta}_a = \overset{n}{\delta}_a+\overset{LM}{\delta}_a+2\overset{n}{\delta}_a\overset{LM}{\delta}_a.$$

Folglich:

$$F_a = (-\overset{L}{\delta}_a-\overset{M}{\delta}_a+\overset{LM}{\delta}_a)(1+2\overset{n}{\delta}_a).$$

Da aber auch

$$\overset{LM}{\delta}_a = \overset{L}{\delta}_a+\overset{M}{\delta}_a+2\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a$$

ist, so ist

$$(9.)\quad F_a = -2\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a(1+2\overset{n}{\delta}_a) \equiv 2\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a \quad (\text{mod. } 4).$$

In dem zweiten Ausdrucke G_a, der mit 2 multiplicirt ist und deshalb nur modulo 2 zu betrachten ist, können wir die Grössen

$$\overset{nL}{\delta}_a,\quad \overset{nLK}{\varepsilon}_a \quad \text{etc.}$$

durch die ihnen modulo 2 congruenten Werthe

$$\overset{n}{\delta}_a+\overset{L}{\delta}_a,\quad \overset{n}{\varepsilon}_a+\overset{L}{\varepsilon}_a+\overset{K}{\varepsilon}_a \quad \text{etc.}$$

ersetzen. So ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$(10.)\quad G_a \equiv \overset{L}{\varepsilon}_a\overset{M}{\delta}_a+\overset{M}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a;$$

daher:

$$(11.)\qquad H \equiv 2\sum_{a=1}^{\varrho}\{\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a+\overset{L}{\varepsilon}_a\overset{M}{\delta}_a\overset{K}{\delta}_a+\overset{M}{\varepsilon}_a\overset{K}{\delta}_a\overset{L}{\delta}_a\}\quad (\text{mod. } 4).$$

Wir setzen nun

$$(12.)\qquad i^H = (-1)^{\frac{1}{2}H} = (K, L, M).$$

Aus dieser Definition geht hervor: Das Zeichen (K, L, M) ist erstens symmetrisch in Bezug auf alle drei Perioden:

$$(13.)\qquad (K, L, M) = (L, K, M) = (K, M, L)\quad \text{etc.}$$

(Wo es nur auf die Symbole ankommt und deswegen kein Missverständniss entstehen kann, sagen wir hier und im Folgenden kurz „Periode" anstatt „halber Periode".) Zweitens ist $\frac{1}{2}H$ linear homogen in Bezug auf jede der drei Charakteristiken. Aus den Congruenzen (1.) folgt deshalb:

$$(14.)\qquad (K, L, M)(K, L, N) = (K, L, MN).$$

Ausserdem ist noch eine dritte Eigenschaft von Wichtigkeit. Nehmen wir $L = M$ an, so wird

$$\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a = (\overset{L}{\delta}_a)^2 \equiv \overset{L}{\delta}_a\quad (\text{mod. } 2);$$

deswegen reducirt sich in dem Ausdruck

$$\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a\overset{M}{\delta}_a+\overset{L}{\varepsilon}_a\overset{M}{\delta}_a\overset{K}{\delta}_a+\overset{M}{\varepsilon}_a\overset{K}{\delta}_a\overset{L}{\delta}_a$$

das erste Glied auf $\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a$, und die beiden folgenden werden einander gleich. Somit erhalten wir in diesem Falle einfacher:

$$(K, L, L) = (-1)^{\Sigma(\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a)}.$$

Daher:

$$(K, L, L)(L, K, K) = (K, L, KL) = (-1)^{\Sigma(\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a+\overset{L}{\varepsilon}_a\overset{K}{\delta}_a)}.$$

Nun sind aber bekanntlich zwei Perioden K, L syzygetisch oder azygetisch, je nachdem die Summe

$$\sum_{a=1}^{\varrho}(\overset{K}{\varepsilon}_a\overset{L}{\delta}_a-\overset{L}{\varepsilon}_a\overset{K}{\delta}_a)$$

eine gerade oder ungerade Zahl ist. Daher ist

$$(K, L, KL)$$

im ersteren Falle $+1$, im zweiten -1. Für die Anwendung des Zeichens können wir hiernach folgenden Satz zu Grunde legen:

Durch Hinzufügung der halben Periode K zu den Argumenten geht

$$\frac{\Theta_{nL}\Theta_{nM}}{\Theta_n\Theta_{nLM}} \quad \textit{in} \quad (K, L, M)\frac{\Theta_{nKL}\Theta_{nKM}}{\Theta_{nK}\Theta_{nKLM}}$$

über. (K, L, M) *bedeutet ein Vorzeichen, das nicht von* n*, sondern nur von den drei Periodenindices* K*,* L*,* M *abhängt, und dessen Eigenschaften folgende sind:*

Erstens ist es symmetrisch in Bezug auf alle drei Perioden; zweitens, wenn N *irgend eine vierte Periode bezeichnet, so ist:*

$$(K, L, M)(K, L, N) = (K, L, MN);$$

drittens ist

$$(L, M, LM) = +1 \quad \textit{oder} \quad -1,$$

je nachdem L*,* M *syzygetische oder azygetische Perioden sind.*

§ 3.

Wir werden hier wenig mit diesem allgemeinen Zeichen zu operiren haben, sondern dafür speciellere, nur von zwei oder einer Periode abhängige einführen, deren Eigenschaften einfacher sind. Wir wollen nämlich weniger die Beziehungen zwischen den Thetafunctionen selbst, als zwischen gewissen Producten derselben ins Auge fassen, die freilich auch als Thetarelationen betrachtet werden können.

Wir nehmen eine von 0 verschiedene halbe Periode K willkürlich, aber fest an und bilden die Producte:

$$\Theta_a\Theta_{aK} = P_a.$$

Diese nennen wir Functionen erster Stufe mit der Periodengruppe $(0, K)$ als Basis. Ist

$$(0, K, L, KL) \quad \text{oder} \quad |K, L|$$

eine Gruppe zweiter Stufe, so bezeichnen wir die Producte von vier Thetafunctionen:

$$Q_a = P_aP_{aL} = \Theta_a\Theta_{aK}\Theta_{aL}\Theta_{aKL}$$

als Functionen zweiter Stufe mit der Basis $|K, L|$. Functionen dritter Stufe endlich sind Producte von acht Thetafunctionen:

$$\Theta_a\Theta_{aK}\Theta_{aL}\Theta_{aM}\Theta_{aKL}\ldots\Theta_{aKLM} = R_a,$$

denen eine Gruppe dritter Stufe $|K, L, M|$ zu Grunde liegt. Die Basis, also eine bestimmte Periodengruppe, wird bei jeder Betrachtung als fest

angenommen. Die Theta selbst können als Functionen der Stufe 0 angesehen werden.

Die Werthe, welche die Functionen

$$P_a, \quad Q_a, \quad R_a \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad \Theta_a$$

annehmen, wenn die Argumente $= 0$ gesetzt werden, bezeichnen wir mit

$$p_a, \quad q_a, \quad r_a \quad \text{etc.} \quad \text{und} \quad c_a$$

und nennen sie Constanten der ersten, zweiten, dritten Stufe etc. oder der Stufe 0. Sie können offenbar nur dann von 0 verschiedene Werthe haben, wenn sämmtliche Thetafunctionen, die als Factoren auftreten, gerade sind. Damit hängt eine Beschränkung zusammen. Wir betrachten nur solche Producte, deren Factoren sämmtlich ungerade oder sämmtlich gerade Functionen sind, und nennen die Producte ungerader Θ: Functionen erster Art, die aus geraden gebildeten: Functionen zweiter Art. Damit wird zugleich die Periodengruppe, welche als Basis dient, einer Beschränkung unterworfen, im Falle sie von höherer als der ersten Stufe ist; denn sind Θ_a, Θ_{aK}, Θ_{aL}, Θ_{aKL} vier gleichartige Functionen, so lässt sich aus ihnen eine gerade *Abel*sche bilden; die Perioden K, L müssen also syzygetisch sein. Folglich muss in jedem Falle die Gruppe, welche die Basis bildet, eine *Göpel*sche oder syzygetische sein. — Die nächsten Sätze sind übrigens von dieser Voraussetzung unabhängig.

Der Quotient zweier Functionen erster Stufe

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\Theta_a \Theta_{aK}}{\Theta_b \Theta_{bK}}$$

ist eine *Abel*sche Function, welche bei der Vermehrung der Argumente um eine beliebige halbe Periode L in

$$\pm \frac{P_{aL}}{P_{bL}} = \pm \frac{\Theta_{aL} \Theta_{aLK}}{\Theta_{bL} \Theta_{bLK}}$$

übergeht. Das Vorzeichen ist hier, wenn wir $ab = M$, oder, was dasselbe ist, $a = bM$ setzen:

$$(L, M, MK);$$

und da wir die Periode K als fest betrachten, so können wir dafür ein besonderes Zeichen:

$$(1.) \qquad (L, M, MK) = (L|M)$$

einführen. Aus dieser Definition und den Eigenschaften des allgemeinen

Zeichens ergeben sich folgende Eigenschaften dieses specielleren:

$$(2.)\quad (L|N)(M|N) = (LM|N),$$
$$(3.)\quad (L|M)(L|N) = (L|MN),$$
$$(4.)\quad (L|M)(M|L) = (L,\ M,\ LM).$$

Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar aus der zweiten des allgemeinen Zeichens; die zweite und dritte bedürfen eines kurzen Beweises. Es ist

$$(L|MN) = (L,\ MN,\ MNK).$$

Dies lässt sich zerlegen in die sechs Factoren:

$$(L,\ M,\ M)(L,\ M,\ N)(L,\ M,\ K)(L,\ N,\ M)(L,\ N,\ N)(L,\ N,\ K).$$

Der zweite und vierte Factor sind einander gleich, wegen der Symmetrie des Zeichens, sie ergänzen sich also zu $+1$; der erste und dritte ergänzen sich zu:

$$(L,\ M,\ MK) = (L|M),$$

der fünfte und sechste zu:

$$(L,\ N,\ NK) = (L|N);$$

also ist:

$$(L|MN) = (L|M)(L|N).$$

Ferner ist

$$(L|M) = (L,\ M,\ M)(L,\ M,\ K),$$
$$(M|L) = (M,\ L,\ L)(M,\ L,\ K),$$

folglich:

$$(L|M)(M|L) = (L,\ M,\ M)(L,\ M,\ L) = (L,\ M,\ LM);$$

d. h. es ist:

$$(L|M)(M|L) = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem die Perioden L, M syzygetisch oder azygetisch sind. Damit sind die wesentlichen Eigenschaften dieses Zeichens festgestellt; es tritt auf als $(L|ab)$ bei dem Uebergange von

$$\frac{P_a}{P_b} \quad \text{in} \quad (L|ab)\frac{P_{aL}}{P_{bL}}.$$

Für die Beziehungen zwischen den Functionen Q ist es noch vortheilhaft, ein Zeichen

$$(M,\ MK,\ ML) = (M)$$

einzuführen, bei welchem K und L als feste Perioden angesehen werden.

Man kann dieses Zeichen auf das vorige zurückführen, indem man

$$(M) = (LM|M)$$

setzt. Daraus folgt dann:

$$(MN)(M)(N) = (LMN|MN)(LM|M)(LN|N),$$

oder, nach leichter Reduction:

$$(MN)(M)(N) = (M|N)(N|M).$$

Demnach ist

$$(MN)(M)(N) = +1 \quad \text{oder} \quad -1,$$

je nachdem die Perioden M, N syzygetisch sind oder nicht.

§ 4.

Bekanntlich existiren in dem System der 4^ϱ Functionen $\frac{4^\varrho+2^\varrho}{2}$ gerade und $\frac{4^\varrho-2^\varrho}{2}$ ungerade, und es lassen sich diese nach folgendem Princip in $\varrho+1$ Gruppen zusammenfassen, deren jede nur Thetafunctionen der gleichen Art enthält. Man kann, und zwar auf mannichfache Art, eine Reihe von $2\varrho+1$ Functionen bilden

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad . \; . \; . \quad \Theta_{2\varrho+1},$$

welche gleichartig, d. h. sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade und zu je dreien azygetisch sind. Eine solche Reihe wollen wir eine Hauptreihe nennen. Die Grössen einer solchen Hauptreihe sind insofern unabhängig, als keine durch eine Combination der übrigen Indices bezeichnet werden kann; oder, was dasselbe ist, es lässt sich aus ihnen keine *Abel*sche Function bilden, die nicht ein Quadrat ist. Daraus folgt aber, dass alle übrigen Functionen durch die ungeraden Combinationen der Indices $1, 2, \ldots 2\varrho+1$ bezeichnet werden können, und ebenso sind zugleich alle halben Perioden eindeutig bestimmt durch die Combinationen gerader Ordnung derselben Elemente. Aus der Definition der Hauptreihe folgt sofort, dass alle durch drei primitive Indices bezeichneten Functionen ebenfalls unter einander gleichartig, aber von entgegengesetzter Art sind zu denen der Hauptreihe. Den Combinationen fünfter Ordnung entsprechen dann wieder Functionen derselben Art, wie Θ_1, Θ_2 etc. Nimmt man hinzu, dass die Anzahl der geraden Functionen grösser ist, als die der ungeraden, so

ergiebt sich: eine Function Θ_a ist gerade, wenn die Ordnung der Combination $a \equiv \varrho$ oder $\varrho+1$ (mod. 4) ist, ungerade im entgegengesetzten Falle.

Von diesem Satz hat Herr *Frobenius* in der Abhandlung: „Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken" *) eine Verallgemeinerung aufgestellt, die in Folgendem besteht.

Es sei gegeben eine syzygetische Periodengruppe νter Stufe

$$0, \quad K, \quad L \quad \text{etc.};$$

ferner sei Θ_a irgend eine Thetafunction. Man bilde alsdann die Reihe der 2^ν Functionen

$$\Theta_a, \quad \Theta_{aK}, \quad \Theta_{aL} \quad \text{etc.}$$

Ist Θ_b in dieser Reihe nicht enthalten, so werde ebenso die neue Reihe

$$\Theta_b, \quad \Theta_{bK}, \quad \Theta_{bL} \quad \text{etc.}$$

gebildet, u. s. f.; auf diese Weise werden schliesslich alle 4^ϱ Theta eingetheilt in $2^{2\varrho-\nu}$ Gruppen von je 2^ν Functionen. ν ist nothwendig $\leqq \varrho$, da die Gruppe als syzygetische vorausgesetzt ist; wir setzen demnach $\varrho-\nu = \sigma$.

Die $2^{2\varrho-\nu}$ oder $2^{2\sigma+\nu}$ Gruppen enthalten im Allgemeinen gerade und ungerade Functionen; es giebt aber genau 4^σ solche Gruppen, die nur gleichartige Functionen enthalten, und zwar $\frac{4^\sigma+2^\sigma}{2}$ Gruppen gerader, $\frac{4^\sigma-2^\sigma}{2}$ ungerader Functionen.

Auf dieses System von 4^σ Gruppen beschränken wir uns. Sind

$$\Theta_a, \quad \Theta_{aK}, \quad \text{etc.,}$$
$$\Theta_b, \quad \Theta_{bK}, \quad \text{etc.,}$$
$$\Theta_c, \quad \Theta_{cK}, \quad \text{etc.}$$

drei Gruppen des Systems, so ist

$$\Theta_{abc}, \quad \Theta_{abcK}, \quad \text{etc.}$$

eine vierte in demselben System; und ist

$$\frac{\Theta_a \Theta_b}{\Theta_c \Theta_{abc}}$$

eine gerade oder eine ungerade Function, so findet dasselbe statt, wenn man Θ_a, Θ_b, Θ_c oder Θ_{abc} durch eine andere derselben Gruppe angehörige Function ersetzt, weil ja alle Functionen derselben Gruppe gleichartig sind.

*) Dieses Journal, Bd. 96.

Die Begriffe „azygetisch" und „syzygetisch" übertragen sich also auf die Gruppen. Es ist nun möglich, $2\sigma+1$ gleichartige und zu je dreien azygetische Gruppen aufzustellen. Nennt man

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots \quad \Theta_{2\sigma+1}$$

die Anfangsglieder derselben, so erhält man das ganze System der 4^σ Gruppen gleichartiger Θ:

$$\Theta_a, \quad \Theta_{aK}, \quad \text{etc.},$$

indem man für a alle Combinationen ungerader Ordnung der Elemente $1, 2, \ldots 2\sigma+1$ setzt. Und zwar enthält eine solche Gruppe wieder lauter gerade Functionen, wenn die Ordnung der Combination $a \equiv \sigma$ oder $\sigma+1$ (mod. 4) ist, im andern Fall ungerade *).

Von diesem sehr allgemeinen Satze machen wir nun Anwendung, indem wir die Functionen jeder einzelnen Gruppe zu einem Product νter Stufe vereinigen:

$$\Pi_a = \Theta_a \Theta_{aK} \Theta_{aL} \Theta_{aKL} \ldots.$$

Die Bezeichnungen „syzygetisch" und „azygetisch" können wir auch hier von den Factoren auf die Producte übertragen, und ebenso die Begriffe gleichartig und ungleichartig. Wenn wir nun auch hier eine Hauptreihe gleichartiger azygetischer Producte bilden:

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \quad \ldots \quad \Pi_{2\sigma+1},$$

so ist die Anordnung aller 4^σ existirenden Functionen Π_a der ersten und zweiten Art genau dieselbe wie die der Thetafunctionen von σ Variabeln, wenn dort eine Hauptreihe der Θ zu Grunde gelegt wird. Für $\sigma = 1$, also $\nu = \varrho - 1$, existiren drei Functionen zweiter Art Π_1, Π_2, Π_3 und eine von der ersten Art Π_{123}; für $\sigma = 2$, $\nu = \varrho - 2$ sind

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \quad \Pi_3, \quad \Pi_4, \quad \Pi_5 \quad \text{und} \quad \Pi_{12345}$$

von der ersten Art, also Producte ungerader Functionen,

$$\Pi_{123}, \quad \Pi_{124}, \quad \ldots \quad \Pi_{345}$$

die zehn Functionen der zweiten Art, welche nicht gleichzeitig mit den Argumenten Null werden müssen. U. s. f. Für $\varrho = 4$ ist also die Anzahl der Constanten dritter Stufe, denen eine bestimmte Periodengruppe zu Grunde

*) S. § 3 der citirten *Frobenius*schen Abhandlung.

liegt, drei; die der Constanten zweiter Stufe 10, die der Constanten erster Stufe 36, endlich die der Theta-Nullwerthe 136.

Für $\varrho = 3$ existiren zu einer syzygetischen Periodengruppe zweiter Stufe $(0, K, L, KL)$ drei Constanten α, β, γ. Wir wollen hier, freilich ohne Beweis, der sich aber leicht führen liesse, die Relation angeben, welche zwischen diesen besteht. Es ist dieselbe, welche besteht zwischen den Quadraten der drei Constanten erster Stufe für $\varrho = 2$, und den vierten Potenzen der drei Constanten 0ter Stufe $\Theta_1(0)$, $\Theta_2(0)$, $\Theta_3(0)$ für $\varrho = 1$; nämlich:

$$\alpha \pm \beta \pm \gamma = 0.$$

Für $\varrho = 4$ bleibt die Analogie bestehen in einem speciellen Falle, während im allgemeinen Falle eine wesentliche Modification der Formel eintritt.

§ 5.

Bei den *Abel*schen Functionen von drei Variabeln giebt es zu einer beliebigen Periodengruppe erster Stufe $(0, K)$ 16 Producte

$$P_a = \Theta_a \Theta_{aK}$$

gleichartiger Factoren; sechs von diesen sind Producte ungerader, die übrigen gerader Θ.

Bezeichnet man fünf von den sechs Functionen der ersten Art durch die Indices 1, 2, 3, 4, 5, so bilden diese eine Hauptreihe;

$$P_{123}, \quad P_{124}, \quad \ldots \quad P_{345}$$

sind die zehn Functionen der zweiten Art, während P_{12345} die sechste Function erster Art ist. Bezeichnen wir die letztere Function auch als P_6, so sind die Voraussetzungen hier ganz symmetrisch in Bezug auf die Indices 1, 2, ... 6; denn alle Functionen $P_1, P_2, \ldots P_6$ sind von der ersten Art, und sie sind zu je dreien azygetisch; nur kann jede der Grössen P durch zwei Indices bezeichnet werden, z. B. P_{123} auch als P_{456}.

Nach einem sehr bekannten Satze über Thetafunctionen von ϱ Argumenten existiren unter den Functionen $P_a = \Theta_a \Theta_{aK}$, wenn beide Factoren als gerade oder beide als ungerade angenommen werden, nur $2^{\varrho-1}$ linear unabhängige. Diese Anzahl verringert sich noch um eine Einheit, wenn wir uns auf die Functionen erster Art beschränken, da diese sämmtlich zugleich mit den Argumenten Null werden. In unserem Falle ist $2^{\varrho-1} = 4$.

Also müssen je vier von den Functionen $P_1, \dots P_6$ durch eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden sein. Es ist leicht, diese Coefficienten zu bestimmen. Sei:

$$(1.) \qquad aP_4 = a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3.$$

Dividirt man die Gleichung durch P_4 und vermehrt die Argumente um eine beliebige halbe Periode L, so geht nach § 3:

$$\frac{P_1}{P_4} \quad \text{in} \quad (L|14)\frac{P_{1L}}{P_{4L}},$$

also die Gleichung (1.) in

$$(2.) \qquad aP_{4L} = (L|14)a_1P_{1L} + \dots + (L|34)a_3P_{3L}$$

über; daraus folgt, wenn wir die Argumente gleich Null setzen:

$$ap_{4L} = (L|14)a_1p_{1L} + \dots + (L|34)a_3p_{3L}.$$

Nehmen wir nun $L = 23$, so wird

$$p_{2L} = p_3 = 0, \quad p_{3L} = p_2 = 0,$$

weil P_2 und P_3 Functionen erster Art sind, dagegen:

$$p_{4L} = p_{234}, \quad p_{1L} = p_{123};$$

sodass wir erhalten:

$$ap_{234} = (23|14)a_1p_{123}.$$

Wir können deswegen setzen:

$$a = p_{123}, \quad a_1 = (23|14)p_{234}, \quad a_2 = (31|24)p_{314}, \quad a_3 = (12|34)p_{124}.$$

Es ergiebt sich demnach:

$$(3.) \qquad p_{123}P_4 = (23|14)p_{234}P_1 + \dots + (12|34)p_{124}P_3.$$

Genau dieselbe Gleichung besteht für die Quadrate der ungeraden Thetafunctionen von zwei Variabeln, weil in beiden Fällen die Voraussetzungen ganz die gleichen sind.

Dies gilt für willkürlich veränderliche Argumente. Beschränkt man sie aber auf solche Werthe, für welche eine gewisse *Abel*sche Function verschwindet, so zerfällt der Quotient je zweier ungeraden Theta in zwei von einander unabhängige variable Factoren, und zwar wird

$$(4.) \qquad \frac{\Theta_m}{\Theta_n} = \frac{\sqrt{u_m}}{\sqrt{u_n}} \cdot \frac{\sqrt{\bar{u}_m}}{\sqrt{\bar{u}_n}}.$$

Hier bedeuten u_m und $\bar{u}_m$ lineare homogene Ausdrücke

$$u_m = A_m\xi + B_m\eta + C_m\zeta; \quad \bar{u}_m = A_m\bar{\xi} + B_m\bar{\eta} + C_m\bar{\zeta};$$

die beiden Systeme von Veränderlichen ξ, η, ζ und $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ sind von einander unabhängig, genügen aber einer und derselben Gleichung vierter Ordnung; die Coefficienten A_m, B_m, C_m sind zugleich die des Anfangsgliedes in der Entwickelung von Θ_m.

Da P_α das Product zweier ungeraden Theta ist, so wird zugleich

$$\frac{P_\alpha}{P_\beta} = \frac{w_\alpha}{w_\beta} \cdot \frac{\bar{w}_\alpha}{\bar{w}_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots 6),$$

wenn man unter w_α, $\bar{w}_\alpha$ die Producte

$$(5.) \qquad w_\alpha = \sqrt{u_\alpha}\sqrt{u_{\alpha K}}, \quad \bar{w}_\alpha = \sqrt{\bar{u}_\alpha}\sqrt{\bar{u}_{\alpha K}} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots 6)$$

versteht. Die Gleichung (3.) giebt dann eine lineare Beziehung zwischen den Grössen

$$w_1\bar{w}_1, \quad w_2\bar{w}_2, \quad w_3\bar{w}_3, \quad w_4\bar{w}_4,$$

die auch als lineare Gleichung zwischen w_1, w_2, w_3, w_4 aufgefasst werden kann. Da aber dann die Coefficienten noch von dem willkürlichen Werthsystem $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ abhängen, so muss schon zwischen w_1, w_2, w_3 eine lineare Gleichung bestehen:

$$(6.) \qquad F_1 w_1 + F_2 w_2 + F_3 w_3 = 0.$$

Um diese Gleichung rein darzustellen, denken wir uns alle sechs Grössen w_α — die zur Periode K gehörigen Wurzelfunctionen zweiten Grades — dargestellt als lineare Functionen zweier unabhängigen Grössen x, y:

$$w_\alpha = A_\alpha x + B_\alpha y$$

und bezeichnen die Determinanten der Coefficienten

$$A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha \quad \text{durch} \quad [\alpha, \beta].$$

Da wir gleichzeitig

$$\bar{w}_\alpha = A_\alpha \bar{x} + B_\alpha \bar{y}$$

setzen können, so erhalten wir eine bilineare Gleichung

$$(A_4 x + B_4 y)(A_4 \bar{x} + B_4 \bar{y}) p_{123}$$
$$= (23|14)(A_1 x + B_1 y)(A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y}) p_{234} + \cdots + (12|34)(A_3 x + B_3 y)(A_3 \bar{x} + B_3 \bar{y}) p_{124},$$

welche identisch bestehen muss für willkürliche Werthe von $x, y, \bar{x}, \bar{y}$. Setzen wir in dieser Identität

$$x = B\,, \quad y = -A_3; \quad \bar{x} = B_2, \quad \bar{y} = -A_2,$$

so reducirt sich dieselbe auf folgende Gleichung:

$$(7.)\qquad [4,2][4,3]p_{123} = (23|14)[1,2][1,3]p_{234},$$

welche wegen der Symmetrie der Voraussetzungen gelten muss bei jeder Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4 unter einander und mit 5 und 6. Dies giebt ein Mittel, um die Determinanten [1, 2], [1, 3] etc. zu berechnen und damit zugleich die Coefficienten der Gleichung (6.); denn wir können in dieser setzen:

$$F_1 = [2,3],\quad F_2 = [3,1],\quad F_3 = [1,2].$$

Fügt man zur Gleichung (7.) noch diejenige hinzu, welche durch Vertauschung von 2 mit 5 entsteht, und bildet den Quotienten beider, so ergiebt sich:

$$(8.)\qquad \frac{p_{123}}{p_{153}}\frac{[4,2]}{[4,5]} = (25|14)\frac{p_{234}}{p_{534}}\frac{[1,2]}{[1,5]},$$

da

$$(23|14)(53|14) = (25|14)$$

ist. Hier setzen wir wieder 3 statt 5 und multipliciren sie dann mit der ursprünglichen Gleichung (7.). Auf diese Weise folgt:

$$(9.)\qquad \frac{p_{123}p_{125}}{p_{135}}[4,2]^2 = \frac{p_{234}p_{254}}{p_{354}}[1,2]^2.$$

Der letzteren Gleichung können wir aber folgende Form geben:

$$(10.)\qquad \frac{[4,2]^2}{p_{421}p_{423}p_{425}p_{426}} = \frac{[1,2]^2}{p_{123}p_{124}p_{125}p_{126}},$$

da

$$p_{135} = p_{246},\quad p_{354} = p_{126}$$

ist. Dies zeigt deutlich, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (10.) unabhängig ist von jeder Vertauschung der Indices. Wenn wir also die Gleichung aufstellen:

$$(11.)\qquad [1,2]^2 = Fp_{123}p_{124}p_{125}p_{126},$$

so können wir in derselben die Indices 1 bis 6 beliebig vertauschen, ohne den Factor F zu ändern. Die Formel (11.) bestimmt also — abgesehen von den Vorzeichen — alle Determinanten $[\alpha,\beta]$.

Der Gleichung (6.) können wir die Form geben:

$$[2,3]w_1+[3,1]w_2+[1,2]w_3 = 0,$$

und, bei der Einsetzung der entsprechenden Werthe für die Determinanten,

die Grösse

$$\sqrt{Fp_{123}}$$

als gemeinsamen Factor fortlassen. So ergiebt sich:

$$(12.)\qquad w_1\sqrt{p_{234}p_{235}p_{236}} \pm w_2\sqrt{p_{314}p_{315}p_{316}} \pm w_3\sqrt{p_{124}p_{125}p_{126}} = 0.$$

Da K eine beliebige Periode, und ebenso w_1, w_2, w_3 drei beliebige unter den sechs zugehörigen Wurzelfunctionen zweiten Grades sind, so umfasst diese Gleichung alle Doppeltangenten-Relationen der Curve vierter Ordnung.

Zweiter Abschnitt.

Aufsuchung der nicht identischen Gleichung, welche zwischen den Nullwerthen der geraden Θ bestehen muss, damit eine algebraische Gleichung vom Range 4 als Grundlage der Theorie angenommen werden darf.

§ 1.

Die Gleichung vierten Ranges, welche zur Definition einer Klasse *Abel*scher Functionen von vier Variabeln führt, enthält bekanntlich höchstens neun wesentliche Parameter, während die Anzahl der Periodicitäts-Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \dots \tau_{44}$ gleich 10 ist. Da die letzteren als Functionen der wesentlichen Parameter allein definirt werden können, so muss zwischen ihnen eine Beziehung stattfinden; sie sind also nicht unabhängig von einander.

Wenn man andrerseits von den Theta-Functionen ausgeht und durch diese die *Abel*schen Functionen von vier Argumenten definirt, so dürfen die Grössen τ, abgesehen von einigen Ungleichheitsbedingungen, als willkürliche angesehen werden. Die letztere Klasse ist dann allgemeiner als die vorige; sie enthält einen Parameter mehr. Man hat deshalb schon längst die erwähnten beiden Fälle unterschieden.

Die Beziehung zwischen den Periodicitäts-Moduln, welche im ersten Falle besteht, kann nicht unmittelbar aus den allgemeinen Eigenschaften der Theta-Reihen allein gefolgert werden. Um sie zu finden, müssen wir deshalb eine Annahme zu Hülfe nehmen, die der algebraischen Theorie entlehnt ist. In dieser werden die Argumente zunächst als Summen von

Integralen eingeführt:

$$u_a = \int_c^x f_a(x)\,dx + \int_{c'}^{x'} f_a(x)\,dx + \text{etc.} \qquad (a=1,2,3,4).$$

Die *Abel*schen Functionen sind algebraische, die Θ dagegen transcendente Functionen von den Grenzen dieser Integrale. Nimmt man in dem ersten Integral x und c als variabel an, lässt aber in allen folgenden die obere mit der unteren Grenze zusammenfallen, so wird der Quotient zweier ungeraden Θ, was unmittelbar klar ist, eine symmetrische Function von x und c. Ausserdem aber zerfällt er auch in zwei Factoren, von denen der eine nur von x, der andere nur von c abhängt. Da dies für je zwei ungerade Functionen Θ_m, Θ_n stattfindet, so können wir setzen:

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_n} = \frac{\Phi_m(x)}{\Phi_n(x)} \cdot \frac{\Phi_m(c)}{\Phi_n(c)}.$$

Die Form der Ausdrücke $\Phi_m(x)$ wird bestimmt, indem man $x-c$ unendlich klein werden lässt; es sind dies die sogenannten Wurzelfunctionen ersten Grades. — Man kann dies so ausdrücken:

I. ***In der speciellen Theorie ist es für beschränkte Werthe der Argumente u möglich, sämmtliche Quotienten ungerader Theta als symmetrische und zerfallende Functionen zweier unabhängigen Variabeln x und c darzustellen.***

Nun tritt in der Theorie der Thetafunctionen ein System homogener quadratischer Gleichungen auf, welches nur die ungeraden Θ enthält. Es muss möglich sein, diesem zu genügen, indem man für jedes Θ_m einen solchen Ausdruck $\Phi_m(x)\Phi_m(c)$ substituirt. Hierin liegt jedenfalls eine sehr wesentliche Eigenthümlichkeit des Systems. Die folgende Untersuchung zeigt, dass diese Eigenschaft keine solche ist, welche dem Gleichungssystem an sich zukommt, sondern dass sie nur dann besteht, wenn zwischen den Nullwerthen der geraden Theta eine nicht identische Gleichung angenommen wird. Daraus folgt:

II. ***Der Satz* I. *gilt nicht für die allgemeinen Abelschen Functionen.***

§ 2.

Die quadratischen Gleichungen, welche zwischen den ungeraden Thetafunctionen bestehen, sind theils lineare Beziehungen zwischen den Quadraten der Theta, theils ebensolche zwischen den Grössen, die wir

Functionen erster Stufe genannt und mit P bezeichnet haben. Nur die letzteren wollen wir hier betrachten; und zwar genügt es, eine einzige solche lineare Gleichung aufzustellen, die freilich wegen der Möglichkeit, die Indices zu vertauschen, ein System von 21 Gleichungen repräsentirt.

Es sei K das Zeichen irgend einer von 0 verschiedenen halben Periode; dann giebt es nach dem *Frobenius*schen Satz 64 Functionen

$$P_a = \Theta_a \Theta_{aK},$$

welche Producte gleichartiger Factoren sind, und zwar 28 Producte ungerader, 36 Producte gerader Θ.

Wir denken uns hier eine Hauptreihe aufgestellt:

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots \quad P_7.$$

Diese, ebenso wie die durch fünf primitive Indices bezeichneten

$$P_{12345}, \quad \ldots \quad P_{34567}$$

sind von der ersten Art; dagegen sind die durch drei oder alle sieben Indices bezeichneten

$$P_{123}, \quad P_{124}, \quad \ldots \quad P_{567} \quad \text{und} \quad P_{1234567}$$

die 36 Functionen der zweiten Art.

Der bequemeren Schreibweise wegen wollen wir für die Combination aller primitiven Indices noch ein besonderes Zeichen einführen:

$$1234567 = \varepsilon;$$

es sind dann

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots \quad P_7, \quad P_{12\varepsilon}, \quad P_{13\varepsilon}, \quad \ldots \quad P_{67\varepsilon}$$

die 28 Producte ungerader,

$$P_{123}, \quad \ldots \quad P_{567} \quad \text{und} \quad P_\varepsilon$$

die 36 Producte gerader Functionen. Der Werth, den eine Function P_m annimmt, wenn die Argumente gleich Null gesetzt werden, möge mit p_m bezeichnet werden, wie früher festgesetzt wurde. Es sind dann $p_1, p_2, \ldots p_7$ und $p_{12\varepsilon}, \ldots p_{67\varepsilon}$ gleich Null, die übrigen 36 Grössen p_{123} etc. und p_ε dagegen von Null verschieden.

Zwischen je neun der 64 Functionen P besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten. Beschränken wir uns dagegen auf die 28 Functionen der ersten Art, so muss schon zwischen je acht derselben eine solche Gleichung stattfinden, weil alle diese gleichzeitig mit

den Argumenten Null werden. Es muss also eine lineare Gleichung bestehen zwischen den sieben Functionen der Hauptreihe und irgend einer der 21 übrigen Functionen erster Art, z. B. $P_{67\varepsilon}$, diese sei:

$$(1.)\qquad FP_{67\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{7}(F_\alpha P_\alpha).$$

Um hier die Coefficienten zu bestimmen, vermehren wir die Argumente um eine zunächst beliebige halbe Periode L. Der Quotient

$$\frac{P_\alpha}{P_{67\varepsilon}}$$

geht hierdurch, zufolge § 3 des ersten Abschnitts, über in

$$(L|\alpha 67\varepsilon)\frac{P_{\alpha L}}{P_{67\varepsilon L}},$$

die Gleichung (1.) selbst also in:

$$(2.)\qquad FP_{67\varepsilon L} = \sum_{\alpha=1}^{7}\{(L|\alpha 67\varepsilon)F_\alpha P_{\alpha L}\}.$$

Daraus folgt, wenn wir die Argumente gleich Null setzen:

$$(3.)\qquad Fp_{67\varepsilon L} = \sum_{\alpha=1}^{7}\{(L|\alpha 67\varepsilon)F_\alpha p_{\alpha L}\}.$$

Nun sei β irgend eine der Zahlen 1, 2, ... 7; wir können dann $L=\beta\varepsilon$ setzen. Alsdann ist:

$$(4.)\qquad \begin{cases} p_{\alpha L} = p_{\alpha\beta\varepsilon} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \lessgtr \beta, \\ \qquad = p_\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha = \beta, \\ p_{67\varepsilon L} = p_{\beta 67}. \end{cases}$$

Somit ergiebt sich aus (3.):

$$Fp_{\beta 67} = (\beta\varepsilon|\beta 67\varepsilon)F_\beta p_\varepsilon;$$

man kann deswegen

$$(5.)\qquad F = p_\varepsilon;\quad F_\alpha = (\alpha\varepsilon|\alpha 67\varepsilon)p_{\alpha 67} \qquad (\alpha=1, 2, \dots 7)$$

setzen. Da für $\alpha = 6$

$$p_{\alpha 67} = p_7 = 0$$

und ebenso für $\alpha = 7$: $p_{\alpha 67} = p_6 = 0$ wird, so sind die Coefficienten F_6 und F_7 Null, die übrigen von Null verschieden. Wir erhalten demnach:

$$(6.)\qquad p_\varepsilon P_{67\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{5}\{(\alpha\varepsilon|\alpha 67\varepsilon)p_{\alpha 67}P_\alpha\}.$$

Aus der Gleichung (3.) können wir eine grosse Anzahl von Bezie-

hungen zwischen den Grössen p erhalten, die hier als Coefficienten auftreten, indem wir für L verschiedene Periodenindices setzen. Es wird für uns genügen, auch von diesen Relationen nur eine aufzustellen. Wir setzen $L = 57$. Dann wird:

$$p_{67\varepsilon L} = p_{56\varepsilon} = 0;$$

ebenso:

$$p_{5L} = p_7 = 0;$$

und da ausserdem F_6 und F_7 gleich Null sind, so erhalten wir die viergliedrige Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \{(57|\alpha 67\varepsilon) F_\alpha p_{\alpha 57}\} = 0.$$

Wir können die Gleichung mit $(57|67)$ multipliciren. Dann bekommen wir das Vorzeichen $(57|\alpha\varepsilon)$ anstatt $(57|\alpha 67\varepsilon)$. Dieses können wir aber ersetzen durch $(\alpha\varepsilon|57)$; denn da

$$\frac{\Theta_\alpha \Theta_{\varepsilon 57}}{\Theta_\varepsilon \Theta_{\alpha 57}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

eine gerade *Abel*sche Function ist (Θ_ε und $\Theta_{\alpha 57}$ sind gerade, Θ_α und $\Theta_{\varepsilon 57}$ ungerade Θ), so sind Θ_ε, Θ_α und $\Theta_{\varepsilon 57}$ syzygetische Functionen, also $\alpha\varepsilon$ und 57 syzygetische Perioden. Wir bekommen also:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon|57) F_\alpha p_{\alpha 57}\} = 0,$$

und wenn wir aus (5.) den Werth von F_α einsetzen:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon|\alpha 56\varepsilon) p_{\alpha 57} p_{\alpha 67}\} = 0.$$

Wir wollen in dieser Formel, was gestattet ist wegen der vollständigen Symmetrie der Voraussetzungen, 5 mit 7 vertauschen, sodass wir

$$(7.) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67) p_{\alpha 56} p_{\alpha 57}\} = 0$$

als Endgleichung betrachten. Dies ist eine quadratische Gleichung — oder vielmehr ein System solcher — zwischen den 36 Constanten erster Stufe, eine biquadratische zwischen den Nullwerthen der Θ. Wir können sie aber auch, was bei einer späteren Untersuchung vortheilhaft sein wird, auffassen als eine lineare Gleichung zwischen Constanten zweiter Stufe.

Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu über die Umkehrung der Vorzeichen. Θ_1, Θ_2 und $\Theta_{12\varepsilon}$ sind, als Factoren von P_1, P_2, $P_{12\varepsilon}$, ungerade

Functionen, Θ_ε dagegen gerade. Da aus diesen vier Theta sich eine *Abel*sche Function bilden lässt, und diese ungerade ist, so sind Θ_1, Θ_2 und Θ_ε azygetisch, folglich auch die Perioden 1ε und 2ε. Daher ist

$$(8.)\qquad (1\varepsilon|2\varepsilon) = -(2\varepsilon|1\varepsilon).$$

Diese Vorzeichen sind also alternirende. Nun kann man aber aus den einfachen alternirenden Vorzeichen die übrigen: $(12|3\varepsilon)$, $(12|34)$ etc. zusammensetzen; z. B. ist

$$(12|3\varepsilon) = (1\varepsilon|3\varepsilon)(2\varepsilon|3\varepsilon),$$
$$(12|34) = (1\varepsilon|3\varepsilon)(2\varepsilon|4\varepsilon)(2\varepsilon|3\varepsilon)(2\varepsilon|4\varepsilon).$$

Daraus ergeben sich nach (8.) die Zeichenrelationen:

$$(12|3\varepsilon) = (3\varepsilon|12),$$
$$(12|34) = (34|12)$$

und ähnliche, die nun nicht mehr eines besonderen Beweises bedürfen.

Hier und im Folgenden muss jede der aufgestellten Gleichungen aus dem bereits angegebenen Grunde auch gelten bei beliebiger Vertauschung der sieben Indices, sodass jede zugleich ein ganzes System repräsentirt.

§ 3.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen (6.) und (7.) sind allgemeine, d. h. sie gelten ohne jede Beschränkung für die Argumente u und die Periodicitätsmoduln τ. Wir machen aber jetzt diejenige Voraussetzung, welche in § 1 dieses Abschnitts angegeben wurde; wir nehmen an, dass die Quotienten ungerader Theta in Wurzelfunctionen zerfallen:

$$(1.)\qquad \frac{\Theta_m}{\Theta_n} = \frac{\Phi_m(x)}{\Phi_n(x)}\cdot\frac{\Phi_m(x')}{\Phi_n(x')},$$

wo x und x' Variable sind. Die Argumente u sind also dann sicher nicht mehr unabhängige veränderliche Grössen.

Wenn wir dann die Wurzelfunctionen zweiten Grades bilden:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \Phi_m(x)\Phi_{mK}(x) = w_m, \\ \Phi_m(x')\Phi_{mK}(x') = w'_m, \end{cases}$$

unter der Voraussetzung, dass m und mK Indices ungerader Theta sind, so wird der Quotient zweier Functionen erster Art

$$(3.)\qquad \frac{P_m}{P_n} = \frac{w_m}{w_n}\cdot\frac{w'_m}{w'_n}.$$

Es giebt also hier 28 Wurzelfunctionen zweiten Grades

$$(4.)\qquad w_1,\quad w_2,\quad \dots\quad w_7;\quad w_{12\varepsilon},\quad \dots\quad w_{67\varepsilon},$$

die zur Periode K gehören. Da die Gleichung (6.) homogen ist, so können wir direct jedes P durch das Product der entsprechenden Wurzelfunctionen ersetzen:

$$(5.)\qquad p_\varepsilon w_{67\varepsilon} w'_{67\varepsilon} = \sum_{a=1}^{5} \{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67) p_{a67} w_a w'_a\}.$$

Diese Gleichung kann, da x' von x unabhängig ist, aufgefasst werden als eine lineare Beziehung zwischen den Grössen w. Wir nehmen an, dass nicht schon zwischen drei dieser Grössen eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht; dann müssen je vier derselben sicher durch eine solche Gleichung verbunden sein. Man kann sich deswegen die 28 Functionen der Reihe (4.) dargestellt denken als lineare Functionen mit constanten Coefficienten dreier Grössen ξ, η, ζ:

$$(6.)\qquad w_m = A_m\xi + B_m\eta + C_m\zeta,$$

sodass zwischen ξ, η, ζ selbst eine lineare Gleichung nicht besteht, und die aus den Coefficienten dreier Ausdrücke gebildeten Determinanten

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} A_m & B_m & C_m \\ A_n & B_n & C_n \\ A_r & B_r & C_r \end{vmatrix} = [m, n, r]$$

von Null verschieden sind.

Da die Grössen w'_m dieselben Functionen von x' sind, wie die w_m von x, so setzen wir ebenso:

$$(8.)\qquad w'_m = A_m\xi' + B_m\eta' + C_m\zeta',$$

und die Gleichung (5.) muss, wenn diese Ausdrücke eingesetzt werden, in eine identische übergehen, da sie linear ist in Bezug auf beide Systeme linear unabhängiger Veränderlicher. Wir fassen sie von jetzt ab als solche auf und können demnach für ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' willkürliche Werthe einsetzen.

Die Determinanten $[m, n, r]$ sind zugleich die Coefficienten der Gleichungen, durch welche irgend vier der 28 linearen Ausdrücke w_m verbunden sind. Es ist identisch:

$$(9.)\qquad [m, n, r]w_p = [p, n, r]w_m + [p, r, m]w_n + [p, m, n]w_r.$$

Wenn wir w_n und w_r gleich Null setzen, so können wir zugleich für alle übrigen Indices, dieser Formel zufolge

$$w_p = [p, n, r]$$

annehmen.

§ 4.

Wir leiten jetzt aus der identischen Gleichung (5.) drei verschiedene Beziehungen ab, die zwischen den Determinanten $[m, n, r]$ und den 36 Grössen p bestehen.

I. Wir setzen erstens:

$$w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w'_4 = 0, \quad w'_5 = 0,$$

und dem entsprechend:

$$w_{67\varepsilon} = [67\varepsilon, 2, 3], \quad w'_{67\varepsilon} = [67\varepsilon, 4, 5], \quad w_1 = [1, 2, 3], \quad w'_1 = [1, 4, 5].$$

So erhalten wir die Gleichung:

$$(1.) \quad p_\varepsilon[67\varepsilon, 2, 3][67\varepsilon, 4, 5] = (1\varepsilon|1\varepsilon 67)p_{167}[1, 2, 3][1, 4, 5].$$

Um hieraus eine Folgerung zu ziehen, betrachten wir für den Augenblick 6 und 7 als fest, sodass nur 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht werden dürfen, und setzen unter dieser Annahme zur Abkürzung:

$$(2.) \quad [67, 2, 3] = [2, 3], \quad p_{167} = \pi_1, \quad (1\varepsilon|1\varepsilon 67) = \delta_1.$$

So ergiebt sich:

$$(3.) \quad p_\varepsilon[2, 3][4, 5] = \delta_1\pi_1[1, 2, 3][1, 4, 5].$$

Wir vertauschen hier 5 mit 1 und bilden den Quotienten beider Gleichungen:

$$\frac{[4, 5]}{[4, 1]} = -\delta_1\delta_5\frac{\pi_1}{\pi_5}\frac{[1, 2, 3]}{[5, 2, 3]}.$$

Ebenso ist:

$$(4.) \quad \frac{[4, 5]}{[4, 2]} = -\delta_2\delta_5\frac{\pi_2}{\pi_5}\frac{[2, 1, 3]}{[5, 1, 3]},$$

$$(5.) \quad \frac{[2, 4]}{[2, 3]} = -\delta_3\delta_4\frac{\pi_3}{\pi_4}\frac{[3, 5, 1]}{[4, 5, 1]};$$

folglich, wenn wir (3.), (4.), (5.) multipliciren:

$$(6.) \quad p_\varepsilon[4, 5]^2 = \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5\frac{\pi_1\pi_2\pi_3}{\pi_4\pi_5}[1, 2, 3]^2.$$

Das Product der Vorzeichen

$$\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5 = \Delta$$

hat den Werth $+1$. Denn es ist

$$\delta_1 = (1\varepsilon|1\varepsilon 67) = (1\varepsilon|2345) = (1\varepsilon|2\varepsilon)(1\varepsilon|3\varepsilon)(1\varepsilon|4\varepsilon)(1\varepsilon|5\varepsilon).$$

Da die einzelnen Zeichen alternirende sind, so zerfällt auf diese Weise Δ in ein Product von 20 Factoren, von denen je zwei sich zu -1 ergänzen. Es ist also $\Delta = +1$.

Kehren wir jetzt wieder zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurück, so haben wir die Formel:

$$(7.)\qquad \frac{[\varepsilon 67, 4, 5]^2}{[1, 2, 3]^2} = \frac{p_{167}p_{267}p_{367}}{p_\varepsilon p_{467}p_{567}}.$$

II. Wir setzen jetzt die Grössen

$$w_3,\quad w_4,\quad w_3',\quad w_5'$$

gleich Null, und entsprechend:

$$w_m = [m, 3, 4],\quad w_m' = [m, 3, 5],$$

sodass also drei Glieder der Gleichung (5.) im vorigen Paragraphen fortfallen. Dann erhalten wir zunächst:

$$(8.)\qquad p_\varepsilon[\varepsilon 67, 3, 4][\varepsilon 67, 3, 5] = \sum_{\alpha=1}^{2} \{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)p_{\alpha 67}[\alpha, 3, 4][\alpha, 3, 5]\}.$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, bedienen wir uns derselben abkürzenden Bezeichnungen wie vorhin. Wir schreiben also:

$$(9.)\qquad p_\varepsilon[3, 4][3, 5] = \sum_{\alpha=1}^{2} \{\delta_\alpha \pi_\alpha[\alpha, 3, 4][\alpha, 3, 5]\}.$$

Nun ist zufolge (4.):

$$\frac{[3, 4]}{[3, 5]} = -\delta_4\delta_5 \frac{\pi_5}{\pi_4} \frac{[5, 1, 2]}{[4, 1, 2]};$$

zufolge (6.):

$$p_\varepsilon[3, 5]^2 = \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5 \frac{\pi_1\pi_2\pi_4}{\pi_3\pi_5}[4, 1, 2]^2;$$

mithin:

$$p_\varepsilon[3, 4][3, 5] = -\delta_1\delta_2\delta_3 \frac{\pi_1\pi_2}{\pi_3}[1, 2, 4][1, 2, 5].$$

Setzt man dies ein für den Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (9.) und dividirt dieselbe durch $\delta_1\delta_2\pi_1\pi_2$, so wird sie symmetrisch in Bezug auf die Indices 1, 2, 3; man erhält:

$$\frac{\delta_2}{\pi_2}[1, 3, 4][1, 3, 5] + \frac{\delta_1}{\pi_1}[2, 3, 4][2, 3, 5] + \frac{\delta_3}{\pi_3}[1, 2, 4][1, 2, 5] = 0,$$

oder:

$$(10.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)\frac{[\beta,\gamma,4][\beta,\gamma,5]}{p_{\alpha 67}}\right\} = 0,$$

wo, in jedem Gliede der Summe, β, γ die beiden von α verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3 bedeuten.

III. Endlich setzen wir:

$$w_{67\varepsilon},\quad w_5,\quad \bar{w}_{67\varepsilon},\quad \bar{w}_5$$

gleich Null, und dem entsprechend:

$$w_\alpha = \bar{w}_\alpha = [\alpha, 5, 67\varepsilon].$$

Bei dieser Annahme werden nur zwei Terme gleich Null, die übrigen Quadrate; wir erhalten:

$$(11.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{4}\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)p_{\alpha 67}[\alpha, 5, 67\varepsilon]^2\} = 0.$$

Bezeichnet man jetzt, ähnlich wie vorhin, durch β, γ, δ die drei von α verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, so ist nach (7.):

$$[\alpha, 5, 67\varepsilon]^2 = \frac{p_{\beta 67}p_{\gamma 67}p_{\delta 67}}{p_\varepsilon p_{\alpha 67}p_{567}}[\beta,\gamma,\delta]^2.$$

Setzt man dies ein und dividirt die Gleichung durch

$$\frac{p_{167}p_{267}p_{367}p_{467}}{p_\varepsilon p_{567}},$$

so folgt:

$$(12.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{4}\left\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)\frac{[\beta,\gamma,\delta]^2}{p_{\alpha 67}}\right\} = 0.$$

Da auf diesen Beziehungen zwischen den Determinanten und den Coefficienten p die weiteren Schlüsse beruhen, so stellen wir diejenigen Gleichungen, welche wir bei der folgenden Untersuchung anwenden werden, nämlich (1.), (7.), (10.) und (12.) dieses Paragraphen und die Relation (7.) in § 2 zu einem Gleichungssystem zusammen, indem wir die zuletzt erhaltene Formel als die wichtigste voranstellen:

$$(A.)\quad \begin{cases} \text{I.} & \sum_{\alpha=1}^{4}\left\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)\frac{[\beta,\gamma,\delta]^2}{p_{\alpha 67}}\right\} = 0,\\ \text{II.} & \sum_{\alpha=1}^{4}\left\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)p_{\alpha 56}p_{\alpha 57}\right\} = 0,\\ \text{III.} & \frac{[67\varepsilon, 4, 5]^2}{[1, 2, 3]^2} = \frac{p_{167}p_{267}p_{367}}{p_\varepsilon p_{467}p_{567}},\\ \text{IV.} & \sum_{\alpha=1}^{3}\left\{(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67)\frac{[\beta,\gamma,4][\beta,\gamma,5]}{p_{\alpha 67}}\right\} = 0,\\ \text{V.} & p_\varepsilon[67\varepsilon, 2, 3][67\varepsilon, 4, 5] = (1\varepsilon|1\varepsilon 67)p_{167}[1, 2, 3][1, 4, 5]. \end{cases}$$

§ 5.

Wir führen jetzt 35 Grössen

$$\Phi_{123},\quad \Phi_{124},\quad \Phi_{234},\quad \ldots\quad \Phi_{567}$$

ein durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{[1,2,3]^2}{p_\varepsilon p_{456} p_{457} p_{467} p_{567}} = \Phi_{123},$$

welche bei jeder Vertauschung der Indices 1 bis 7 gelten soll. Dieser Definition zufolge können wir in der ersten Gleichung des Systems (*A.*):

$$[\beta,\gamma,\delta]^2 \quad \text{durch} \quad p_\varepsilon p_{\alpha 56} p_{\alpha 57} p_{\alpha 67} p_{567} \Phi_{\beta\gamma\delta}$$

ersetzen. Indem wir in der Gleichung, welche so entsteht, noch 5 mit 6 und 7 vertauschen, erhalten wir das folgende System:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon\,|\,\alpha\varepsilon 67)\, p_{\alpha 56} p_{\alpha 57} \Phi_{\beta\gamma\delta}\} = 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon\,|\,\alpha\varepsilon 75)\, p_{\alpha 67} p_{\alpha 65} \Phi_{\beta\gamma\delta}\} = 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{4} \{(\alpha\varepsilon\,|\,\alpha\varepsilon 56)\, p_{\alpha 75} p_{\alpha 76} \Phi_{\beta\gamma\delta}\} = 0. \end{cases}$$

Dies sind drei homogene lineare Gleichungen zwischen den vier Grössen Φ_{234}, Φ_{341}, Φ_{412}, Φ_{123}; in jeder derselben ist die Summe der Coefficienten 0, wie aus der Formel (II.) desselben Systems hervorgeht. Es seien

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4;\quad b_1,\quad \ldots\quad b_4;\quad c_1,\quad \ldots\quad c_4$$

die Coefficienten dieser Gleichungen, und x_1, x_2, x_3, x_4 die vier Grössen Φ_{234}, ... Φ_{123}. Aus

$$\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 &= 0, \\ a_1 \quad +a_2 \quad +a_3 \quad +a_4 \quad &= 0 \end{aligned}$$

folgt dann:

$$a_1(x_1-x_4)+a_2(x_2-x_4)+a_3(x_3-x_4) = 0;$$

ebenso:

$$\begin{aligned} b_1(x_1-x_4)+b_2(x_2-x_4)+b_3(x_3-x_4) &= 0, \\ c_1(x_1-x_4)+c_2(x_2-x_4)+c_3(x_3-x_4) &= 0. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$(3.)\qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4,$$

wenn nicht die Determinante

$$(4.) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = D$$

den Werth 0 hat. Die Annahme aber, dass eine solche Determinante verschwindet, ist wenigstens in dem Falle auszuschliessen, wo die Definition der *Abel*schen Functionen auf einer Gleichung vierten Ranges beruht, welche neun wesentliche Constanten enthält. Um dies zu zeigen, nehmen wir mit dem Ausdruck D eine Umformung vor.

b_1 und c_1 enthalten den Factor p_{167}; es ist also

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + p_{167} . G,$$

wo G eine ganze Function von Theta-Nullwerthen bedeutet. Ferner enthalten b_2, c_2 den gemeinsamen Factor p_{267}, b_3 und c_3 enthalten p_{367}, und es ist $a_1 = \pm p_{156} p_{157}$. Folglich ergiebt sich:

$$(5.) \qquad D = \pm p_{156} p_{157} p_{267} p_{367} \varDelta + p_{167} G,$$

wo

$$\varDelta = \begin{vmatrix} (2\varepsilon|2\varepsilon 75) p_{256} & (3\varepsilon|3\varepsilon 75) p_{356} \\ (2\varepsilon|2\varepsilon 56) p_{257} & (3\varepsilon|3\varepsilon 56) p_{357} \end{vmatrix},$$

also:

$$(6.) \qquad \varDelta = \pm (p_{256} p_{357} - (23|67) p_{356} p_{257})$$

ist. — Nun beruhte die Gleichung

$$(1\varepsilon|1\varepsilon 67) p_{156} p_{157} + \cdots + (4\varepsilon|4\varepsilon 67) p_{456} p_{457} = 0$$

nur auf der Voraussetzung, dass die Functionen $P_1, P_2, \ldots P_7$ eine Hauptreihe bilden; indem wir andere Grundfunctionen wählen, die denselben Bedingungen genügen:

$$P_\alpha, \quad P_\beta, \quad P_\gamma, \quad P_\delta, \quad P_\varkappa, \quad P_\lambda, \quad P_\mu,$$

können alle 64 Functionen P auch durch die Combinationen dieser Indices bezeichnet werden; und es muss dann ebenfalls

$$(7.) \qquad \begin{cases} (\alpha\varepsilon'|\alpha\varepsilon'\lambda\mu) p_{\alpha\varkappa\lambda} p_{\alpha\varkappa\mu} + (\beta\varepsilon'|\beta\varepsilon'\lambda\mu) p_{\beta\varkappa\lambda} p_{\beta\varkappa\mu} \\ + (\gamma\varepsilon'|\gamma\varepsilon'\lambda\mu) p_{\gamma\varkappa\lambda} p_{\gamma\varkappa\mu} + (\delta\varepsilon'|\delta\varepsilon'\lambda\mu) p_{\delta\varkappa\lambda} p_{\delta\varkappa\mu} = 0 \end{cases}$$

sein, wenn wir unter ε' die Combination der sieben Indices α bis μ verstehen.

Nun bekommen wir eine zweite solche Hauptreihe, wenn wir den

Indices α bis μ folgende Werthe beilegen:

(8.) $\quad \alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 46\varepsilon, \quad \delta = 16\varepsilon, \quad \varkappa = 56\varepsilon, \quad \lambda = 23\varepsilon, \quad \mu = 76\varepsilon.$

Dann wird

$$(9.) \qquad \varepsilon' = 1457\varepsilon = 236.$$

Alle diese Indices bezeichnen nämlich Functionen erster Art. Durch die Combination dreier aber erhält man immer entweder eine dreigliedrige Combination oder den Index ε, also immer einen Index, der eine Function zweiter Art bezeichnet. Wir bekommen also wieder eine Hauptreihe. Somit muss unter den Annahmen (8.) die Gleichung (7.) bestehen. — Nun folgt aus (8.) und (9.):

$$\alpha\varepsilon' = 26, \quad \alpha\varepsilon'\lambda\mu = 37, \quad \alpha\varkappa\lambda = 256, \quad \alpha\varkappa\mu = 357;$$

folglich:

$$(\alpha\varepsilon'|\alpha\varepsilon'\lambda\mu)p_{\alpha\varkappa\lambda}p_{\alpha\varkappa\mu} = (26|37)p_{256}p_{357}.$$

Wenn wir in derselben Weise die übrigen Glieder der Gleichung (7.) umformen, so ergiebt sich:

$$(10.) \quad \begin{cases} (26|37)p_{256}p_{357}+(36|27)p_{356}p_{267} \\ +(1567|1523)p_{167}p_{123}+(4567|4523)p_{467}p_{423} = 0; \end{cases}$$

oder:

$$\pm\Delta = p_{256}p_{357}-(23|67)p_{356}p_{267} = \pm p_{167}p_{123}\pm p_{467}p_{423}.$$

Das eine Glied des Ausdrucks auf der rechten Seite, welches den Factor p_{167} enthält, können wir mit $p_{167}G$ vereinigen und erhalten so:

$$(11.) \qquad D = \pm p_{234}p_{267}p_{367}p_{467}p_{156}p_{157}+\bar{G}.p_{167},$$

wo $\bar{G}$ ebenfalls eine ganze Function der Grössen p bedeutet.

Diese Darstellung zeigt nun zunächst, dass D nicht identisch Null ist. Denn andernfalls würde aus der Annahme, dass ein Factor von p_{167}, also der Nullwerth *eines* geraden Theta, verschwindet, folgen, dass mindestens noch eine zweite gerade Thetafunction gleichzeitig mit den Argumenten verschwindet.

Dies ist unrichtig in der allgemeinen Theorie; es ist nicht einmal richtig in der speciellen, der eine Gleichung vierten Ranges zu Grunde liegt. Denn Herr *Weber* hat in der Abhandlung: „Ueber einige besondere Ausnahmefälle der *Abel*schen Functionen"*) gezeigt, dass man über eine belie-

*) Math. Annalen Bd. 13.

bige von den geraden Thetafunctionen die Voraussetzung machen darf, sie werde Null gleichzeitig mit den Argumenten, ohne dass hieraus das Verschwinden des Nullwerths einer zweiten folgt. Von den beiden Gleichungen zweiten und dritten Grades, welche zwischen den Ableitungen der Integrale erster Gattung bestehen, reducirt sich die erstere in diesem Falle auf die eines Kegels.

Es kann also weder in dem allgemeinen Falle, wo die Periodicitätsmoduln τ als unabhängige Grössen aufgefasst werden, noch in dem speciellen, wo sie Functionen der neun wesentlichen Parameter einer Gleichung vierten Ranges sind, eine solche Determinante, wie wir sie mit D bezeichnet haben, verschwinden, und daraus folgt, dass die vier Grössen $\Phi_{234}, \dots \Phi_{123}$ einander gleich sein müssen.

Da dies auch bei jeder Vertauschung der Indices gilt, so müssen die 35 Grössen $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ sämmtlich denselben Werth haben, den wir jetzt mit Φ bezeichnen.

§ 6.

Zu den Formeln des Systems $(A.)$ tritt nun eine neue Fundamentalgleichung hinzu:

$$(1.)\qquad [1, 2, 3]^2 = \Phi p_\varepsilon p_{456} p_{457} p_{467} p_{567}.$$

Diese ersetzt die Gleichung I. des Systems. Auch die Gleichung III. kann durch Einführung dieses Ausdrucks in anderer Form geschrieben werden. Zugleich ändern wir die übrigen Gleichungen durch eine neue Bezeichnung der Determinanten. Wir machen den Ausdruck $[1, 2, 3]$ symmetrisch in Bezug auf die Indices 1, 2, 3, indem wir ihn mit den drei alternirenden Zeichen

$$(1\varepsilon|2\varepsilon),\quad (1\varepsilon|3\varepsilon),\quad (2\varepsilon|3\varepsilon)$$

multipliciren. Mit diesem Vorzeichen genommen möge die Determinante als F_{123} bezeichnet werden:

$$(2.)\qquad F_{123} = (1\varepsilon|2\varepsilon)(1\varepsilon|3\varepsilon)(2\varepsilon|3\varepsilon)[1, 2, 3].$$

In ähnlicher Weise setzen wir

$$(3.)\qquad [67\varepsilon, 4, 5] = (4\varepsilon|5\varepsilon)[67\varepsilon; 45].$$

Dann erhalten wir folgendes abgeänderte System:

$$
(B.)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{I.} & F_{123}^2 = \Phi p_\varepsilon p_{456} p_{457} p_{467} p_{567}, \\
\text{II.} & [67\varepsilon, 45]^2 = \Phi p_{167} p_{267} p_{367} p_{456} p_{457}, \\
\text{III.} & p_\varepsilon [67\varepsilon; 23][67\varepsilon; 45] = p_{167} F_{123} F_{145}, \\
\text{IV.} & \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ (\alpha\varepsilon|\beta\gamma) \frac{F_{\beta\gamma 4} F_{\beta\gamma 5}}{p_{\alpha 67}} \right\} = 0, \\
\text{V.} & \sum_{\alpha=1}^{4} \{ (\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67) p_{\alpha 56} p_{\alpha 57} \} = 0.
\end{array}\right.
$$

Wenn man vom Vorzeichen absieht, ist die Gleichung III. schon eine Folge von I. und II.

Die Gleichungen III. und IV. haben andere Vorzeichen erhalten, als die ursprünglichen V. und IV. in dem System (*A.*). Dass sie richtig sind, ist leicht zu erkennen. — Zunächst ist in der Gleichung III.:

$$F_{123} F_{145} = (1\varepsilon|2345)(2\varepsilon|3\varepsilon)(4\varepsilon|5\varepsilon)[1, 2, 3][1, 4, 5],$$

2345 aber gleich $1\varepsilon 67$.

Ferner in Gleichung IV.:

$$F_{\beta\gamma 4} F_{\beta\gamma 5} = (\beta\gamma|45)[\beta, \gamma, 4][\beta, \gamma, 5],$$
$$(\beta\gamma|45) = (\alpha\varepsilon|45)(\alpha\beta\gamma\varepsilon|45),$$

also:

$$(\alpha\varepsilon|\beta\gamma)(\beta\gamma|45) = (\alpha\beta\gamma\varepsilon|45)(\alpha\varepsilon|\beta\gamma 45)$$
$$= (\alpha\beta\gamma\varepsilon|45)(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67);$$

und da $(\alpha\beta\gamma\varepsilon|45)$ als gemeinsamer Factor fortgelassen werden kann, so stimmen beide Formeln überein.

Es tritt bei dieser Zusammenstellung schon die vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Argumenten hervor; alle Gleichungen des Systems (*B.*) gelten auch dann, wenn man unter $p_{,,,}$ das Quadrat des Nullwerths einer geraden Thetafunction von drei Argumenten, unter $A_{,,,}$, $B_{,,,}$, $C_{,,,}$ die Coefficienten des ersten Gliedes in der Entwickelung einer der 28 ungeraden nach homogenen Functionen der Veränderlichen versteht. Es ist deshalb natürlich, dass auch die Folgerungen, welche wir in diesem Paragraphen aus dem System (*B.*) ziehen, bekannten Sätzen genau entsprechen.

Zunächst sind durch I. und II. die Coefficienten der Gleichungen, welche zwischen den Wurzelfunctionen zweiten Grades

$$w_1 = \Phi_1(x)\Phi_{1\kappa}(x), \quad \ldots \quad w_{67\varepsilon} = \Phi_{67\varepsilon}(x)\Phi_{67\varepsilon\kappa}(x)$$

bestehen, abgesehen vom Vorzeichen, bestimmt. Nach der Definition der Ausdrücke $[m, n, r]$ ist

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left|\pm [\beta, \gamma, \delta] w_\alpha\right| = 0$$

oder:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left|\pm F_{\beta\gamma\delta} w_\alpha\right| = 0$$

und ebenso:

$$F_{123} w_{67\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left|\pm [67;\ \beta\gamma] w_\alpha\right|.$$

Wenn man für die Determinanten-Ausdrücke ihre Werthe einsetzt, so erhält man:

$$(4.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \left|\pm \sqrt{p_{\alpha 56} p_{\alpha 57} p_{\alpha 67}}\, w_\alpha\right| = 0$$

und

$$(5.)\qquad \sqrt{p_\varepsilon p_{456} p_{457}}\, w_{67\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left|\pm \sqrt{p_{\alpha 67} p_{\beta\gamma 6} p_{\beta\gamma 7}}\, w_\alpha\right|.$$

Man kann die Grössen $p_{\alpha\beta\gamma}$ und demnach auch die Coefficienten dieser letzten Gleichung ersetzen durch Ausdrücke, welche rational aus den sieben Werthsystemen A_α, B_α, C_α $(\alpha = 1, 2, \dots 7)$ gebildet sind. Die Formel I. in $(B.)$ definirt ein System von 35 Gleichungen, mit dessen Hülfe man die 35 Grössen $p_{\alpha\beta\gamma}$ bestimmen kann. Es besteht folgende Umkehrung dieser Formel:

Bezeichnet man mit Π das Product aller 35 Grössen $p_{\alpha\beta\gamma}$, mit $\Pi_\varkappa$ dagegen das Product derjenigen 15 Grössen $p_m = p_{\varkappa\alpha\beta}$, bei denen die Combination m das Element $\varkappa$ enthält, so ist:

$$(6.)\qquad p_{123}^2 = \frac{\Pi}{\Phi^3 p_\varepsilon^3} \frac{F_{456}^2 F_{457}^2 F_{467}^2 F_{567}^2}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 F_{123}^2}.$$

Man hat, um diese Gleichung zu beweisen, nur für die fünf Grössen $F^2 \dots F^2$ ihre durch I. gegebenen Werthe einzusetzen.

Hieraus ergiebt sich:

$$(7.)\qquad p_{123} = R \cdot \frac{F_{456} F_{457} F_{467} F_{567}}{\sqrt{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3}\, F_{123}},$$

wo R einen von den Indices unabhängigen Factor bedeutet, dessen Vorzeichen beliebig gewählt werden kann; das Vorzeichen von $\sqrt{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3}$ dagegen ist durch diese Formel bestimmt.

In der Gleichung (IV.) des Systems können wir jetzt $p_{\alpha 67}$ durch

$$R\frac{F_{\beta\gamma 4}F_{\beta\gamma 5}F_{\beta 45}F_{\gamma 45}}{\sqrt{\Pi_\alpha \Pi_6 \Pi_7 F_{\alpha 67}}}$$

ersetzen; dadurch geht sie über in:

$$(8.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3}\left|(\alpha\varepsilon|\beta\gamma)\sqrt{\Pi_\alpha \Pi_6 \Pi_7 F_{\alpha 67} F_{\alpha 45}}\right| = 0.$$

Offenbar muss die Gleichung, welche wir aus dieser durch Vertauschung von 45 mit 67 erhalten, mit ihr geradezu identisch sein, d. h. die Vorzeichen der Wurzelausdrücke müssen so beschaffen sein, dass immer:

$$\frac{\sqrt{\Pi_1 \Pi_6 \Pi_7}}{\sqrt{\Pi_2 \Pi_6 \Pi_7}} = \frac{\sqrt{\Pi_1 \Pi_4 \Pi_5}}{\sqrt{\Pi_2 \Pi_4 \Pi_5}}$$

ist. Dies sagt aber nichts anderes aus, als dass es möglich sein muss, $\sqrt{\Pi_1}$, $\sqrt{\Pi_2}$, ... $\sqrt{\Pi_7}$ mit solchem Zeichen zu wählen, dass allgemein:

$$(9.)\qquad \sqrt{\Pi_\alpha \Pi_\beta \Pi_\gamma} = \sqrt{\Pi_\alpha}\sqrt{\Pi_\beta}\sqrt{\Pi_\gamma}$$

ist. Demnach wird:

$$(10.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3}\left|(\alpha\varepsilon|\beta\gamma)\sqrt{\Pi_\alpha} F_{\alpha 45} F_{\alpha 67}\right| = 0.$$

Wenn wir hier 4 mit 6 vertauschen, so bekommen wir eine zweite Gleichung, die mit der ersten zusammen das Verhältniss von $\sqrt{\Pi_1}$ zu $\sqrt{\Pi_2}$ rational durch die Grössen $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ bestimmt. Wir können setzen:

$$(11.)\qquad (\alpha\varepsilon|\gamma\varepsilon)(4\varepsilon|6\varepsilon)(5\varepsilon|7\varepsilon)\left|F_{\alpha 45}F_{\alpha 67}F_{\gamma 65}F_{\gamma 47} - F_{\gamma 45}F_{\gamma 67}F_{\alpha 65}F_{\alpha 47}\right| = G_\beta.$$

G_β ist dann die quadratische Determinante, deren Verschwinden ausdrückt, dass die von $A_\beta B_\beta C_\beta$ verschiedenen Punkte der Reihe $A_1 B_1 C_1 \ldots A_7 B_7 C_7$ auf einem Kegelschnitt liegen; mit einem solchen Product alternirender Zeichen multiplicirt, dass sie symmetrisch wird in Bezug auf alle sechs von β verschiedenen Indices und deshalb durch β allein bezeichnet werden kann.

Aus (10.) folgt dann:

$$\sqrt{\Pi_1}\,G_2 - \sqrt{\Pi_2}\,G_1 = 0$$

oder:

$$(12.)\qquad \sqrt{\Pi_1} = cG_1,$$

wo wieder c einen von den Indices unabhängigen Factor bedeutet.

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (7.) können wir jetzt durch den rationalen ersetzen:

$$\frac{R}{c^3}\,\frac{F_{456}F_{457}F_{467}F_{567}}{G_1G_2G_3F_{123}};$$

daher, wenn wir

$$\frac{R}{c^3} = p_\varepsilon G_1G_2G_3G_4G_5G_6G_7.s$$

setzen:

$$(13.)\qquad \frac{p_{123}}{p_\varepsilon} = \frac{sG_4G_5G_6G_7F_{456}F_{457}F_{467}F_{567}}{F_{123}}.$$

Demnach ist auch

$$\frac{p_{167}}{p_\varepsilon} = s\cdot\frac{G_2G_3F_{234}F_{235}G_4G_5F_{452}F_{453}}{F_{167}},$$

und man kann deshalb der Gleichung (III.) im System (*B.*) folgende Gestalt geben:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \dfrac{(67\varepsilon;\ 23)}{G_2G_3F_{231}F_{234}F_{235}F_{267}F_{367}}\cdot\dfrac{(67\varepsilon;\ 45)}{G_4G_5F_{451}F_{452}F_{453}F_{467}F_{567}} \\ \qquad = \dfrac{s}{F_{167}F_{267}F_{367}F_{467}F_{567}} = \dfrac{s}{F_{67}}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung mit F_{67} das Product der fünf Factoren $F_{\alpha 67}$ bezeichnet ist.

Bei dieser Form der Gleichung lässt sich unmittelbar erkennen, dass die beiden Factoren, aus denen der Ausdruck auf der linken Seite sich zusammensetzt, Werthe besitzen müssen, welche von der Vertauschung der Indices 1, 2, 3, 4, 5 unabhängig sind; die beiden Factoren müssen deshalb auch einander gleich sein. Daher ist

$$(15.)\qquad [67\varepsilon;\ 23] = \sqrt{\frac{s}{F_{67}}}\,G_2G_3F_{231}F_{234}F_{235}F_{267}F_{367}.$$

Es ist aber identisch:

$$F_{123}w_{67\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{3}\{(\alpha\varepsilon|\beta\gamma)[67\varepsilon;\ \beta\gamma]w_\alpha\},$$

folglich:

$$(16.)\qquad w_{67\varepsilon} = \sqrt{\frac{s}{F_{67}}}\sum_{\alpha=1}^{3}\{(\alpha\varepsilon|\beta\gamma)G_\beta G_\gamma F_{\beta\gamma 4}F_{\beta\gamma 5}F_{\beta 67}F_{\gamma 67}w_\alpha\}.$$

Dies stimmt überein mit der Darstellung der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung durch 7 unter ihnen, welche einer Hauptreihe entsprechen. Die letzte Formel bringt also den Satz zur Evidenz:

Es existirt eine ebene Curve vierter Ordnung, deren 28 Doppeltangenten durch die Gleichungen $w_m = 0$ gegeben sind.

§ 7.

In § 5 hatten wir zwei Annahmen aufgestellt, von denen wir die zweite ausschlossen. Aber auch die erste führt zu einer Gleichung oder vielmehr zu einem System von Gleichungen zwischen den Nullwerthen der geraden Thetafunctionen, das wir aufstellen und ausführlich untersuchen wollen. Wir werden sehen, dass dieses System von Gleichungen zwar nicht für willkürliche Werthe der Periodicitätsmoduln τ_{11} etc. erfüllt ist, aber auch nur eine einzige Beziehung zwischen ihnen darstellt.

Wir gehen aus von der identischen Determinantenrelation:

$$[2, 3, 5][1, 4, 5]+[3, 1, 5][2, 4, 5]+[1, 2, 5][3, 4, 5] = 0,$$

der wir die Form geben:

$$(1.) \qquad \Sigma\{\pm F_{\alpha\delta 5} F_{\beta\gamma 5}\} = 0,$$

indem wir die Vorzeichen unberücksichtigt lassen. Die einzelnen Glieder entsprechen den drei möglichen Zerlegungen von $\alpha\beta\gamma\delta = 1234$ in (12, 34), (13, 24), (23, 14). Der Gleichung (I.) im System (*B.*) zufolge ist:

$$F_{\alpha\delta 5} = \sqrt{\Phi p_\varepsilon p_{\beta 67} p_{\gamma 67} p_{\beta\gamma 6} p_{\beta\gamma 7}},$$
$$F_{\beta\gamma 5} = \sqrt{\Phi p_\varepsilon p_{\alpha 67} p_{\delta 67} p_{\alpha\delta 6} p_{\alpha\delta 7}}.$$

Folglich erhält man aus (1.), indem man

$$\Phi p_\varepsilon \sqrt{p_{\alpha 67} p_{\beta 67} p_{\gamma 67} p_{\delta 67}}$$

als gemeinsamen Factor fortlässt:

$$(2.) \qquad \Sigma\{\pm \sqrt{p_{\alpha\delta 6} p_{\alpha\delta 7} p_{\beta\gamma 6} p_{\beta\gamma 7}}\} = 0.$$

Wir wollen dies auffassen als eine Gleichung zwischen den Nullwerthen der geraden Θ, indem wir für diese eine Hauptreihe von neun Functionen aufstellen. Natürlich kann die Gleichung selbst hierdurch nicht vereinfacht werden, da ja jedes p jetzt durch ein Product zweier Factoren zu ersetzen ist. — Die Functionen der Hauptreihe bezeichnen wir auch wieder durch die ersten ganzen Zahlen:

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \Theta_3, \quad \ldots \quad \Theta_9$$

und setzen

$$K = 89;$$

natürlich ist diese Bezeichnung nicht mit der bisherigen in Uebereinstimmung; aber wir werden sofort die geringe Abänderung erkennen, welche mit den

bisher aufgestellten Formeln vorgenommen werden muss, damit sie auch bei der neuen Bezeichnungsweise gelten.

Hier sind die durch einen, fünf und neun Indices bezeichneten Functionen gerade, die durch drei und sieben Indices bezeichneten ungerade. Wenn wir aber für die Combination aller neun Indices wieder ein besonderes Zeichen $\varkappa$ einführen, so sind

$$\Theta_\varkappa, \quad \Theta_\alpha \quad \text{und} \quad \Theta_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$$

die geraden,

$$\Theta_{\alpha\beta\varkappa} \quad \text{und} \quad \Theta_{\alpha\beta\gamma}$$

die ungeraden Functionen; wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ irgend welche verschiedene unter den Zahlen 1 bis 9 bedeuten. Es sind daher

$$\Theta_{\alpha 8\varkappa}\Theta_{\alpha 9\varkappa}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots 7),$$

$$\Theta_{\alpha\beta 8}\Theta_{\alpha\beta 9} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots 7, \ \alpha \gtrless \beta)$$

die 28 Producte ungerader Functionen, welche zur Periode $K = 89$ gehören, und zwar bilden die ersten sieben eine Hauptreihe, da die Functionen $\Theta_{\alpha 8\varkappa}$ zu je dreien azygetisch sind. Die bisher aufgestellten Formeln müssen deshalb gelten auch bei dieser Bezeichnung, der eine Hauptreihe von neun Thetafunctionen zu Grunde liegt, wenn die Indices

$$1, \ 2, \ 3, \ \dots \ 7$$

ersetzt werden durch

$$18\varkappa, \ 28\varkappa, \ 38\varkappa, \ \dots \ 78\varkappa,$$

und $K = 89$ angenommen wird. An Stelle von $p_{\alpha\beta\gamma}$ erhalten wir dan $p_{\alpha\beta\gamma 8\varkappa}$ oder, wenn der Nullwerth eines geraden Θ_m mit c_m bezeichnet wir

$$c_{\alpha\beta\gamma 8\varkappa}c_{\alpha\beta\gamma 9\varkappa};$$

die Gleichung (2.) geht dadurch über in folgende:

$$(3.) \qquad \Sigma\left|\pm\sqrt{c_{\alpha\delta 68\varkappa}c_{\alpha\delta 69\varkappa}c_{\alpha\delta 78\varkappa}c_{\alpha\delta 79\varkappa}c_{\beta\gamma 68\varkappa}c_{\beta\gamma 69\varkappa}c_{\beta\gamma 78\varkappa}c_{\beta\gamma 79\varkappa}}\right| = 0.$$

Zu bemerken ist hierbei, dass $c_{\alpha\delta 68\varkappa}$ identisch ist mit $c_{\beta\gamma 579}$, etc.; eine ger fügige Vereinfachung könnte übrigens dadurch herbeigeführt werden, man überall den Index $\varkappa$ fortlässt; dies würde keine Zweideutigkeit ursachen.

Die Gleichung (3.) muss bestehen bei jeder Vertauschung Indices 1 bis 9, und noch mehr: bei jeder Wahl der Hauptreihe, so die Voraussetzungen gelten, die der bisherigen Untersuchung zu G

liegen. Man kann durch eine veränderte Wahl der Functionen, welche die Hauptreihe bilden, analoge Formeln erhalten, in denen auch die Grössen $c_1, c_2, \dots c_9$ und c_x auftreten. Da aber unsere Voraussetzung nur eine einzige Bedingung zwischen den wesentlichen Constanten τ herbeiführen darf, so müssen aus einer einzigen Gleichung dieses Systems alle übrigen hervorgehen, wenn man diejenigen Relationen zu Hülfe nimmt, welche bei willkürlichen Werthen der τ bestehen und aus den allgemeinen Eigenschaften der Thetafunctionen entspringen. Dies ist ein Satz, den wir auch direct beweisen wollen.

§ 8.

Wenn wir den Index einer der Grössen, die unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung (3.) vorkommen, gleich a setzen, z. B. $a\delta 68x = a$, und diesen mit den sieben übrigen combiniren, so erhalten wir die Periodenindices:

$$89, \quad 67, \quad 6789, \quad 1234, \quad 123489, \quad 123467, \quad 12346789.$$

Fügen wir die Periode 0 hinzu, so haben wir eine Periodengruppe dritter Stufe:

$$\{89, \ 67, \ 1234\}.$$

Diese Periodengruppe ist syzygetisch, da Θ_a, Θ_{aK}, Θ_{aL}, Θ_{aKL} gerade Functionen sind, wenn K, L zwei von den drei Perioden bedeuten. Es giebt aber überhaupt nach dem *Frobenius*schen Satz nur drei Functionen dritter Stufe, die zu einer bestimmten solchen Periodengruppe gehören und die aus lauter geraden Factoren bestehen, also auch nur drei Constanten, die wir als r_1, r_2, r_3 bezeichnen wollen. Diese drei Constanten müssen demnach identisch sein mit den drei Producten, deren Wurzeln in Gleichung (3.) vorkommen. Wir werden deshalb den zu beweisenden Satz in dieser Form aussprechen können:

Zu jeder syzygetischen Periodengruppe dritter Stufe gehören drei Constanten r_1, r_2, r_3; wenn für eine bestimmte Gruppe die Gleichung besteht

$$\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2} \pm \sqrt{r_3} = 0,$$

so besteht eine ebensolche Gleichung für jede derartige Gruppe.

Wir können aber jetzt den Satz so aufstellen, dass er für die allgemeine Theorie gilt:

Zwischen den drei Constanten dritter Stufe, die einer bestimmten Göpelschen oder syzygetischen Periodengruppe entsprechen, besteht die Gleichung:

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2-2r_1r_2-2r_1r_3-2r_2r_3 = J,$$

wo J eine Grösse bedeutet, die für alle diese Periodengruppen denselben Werth hat, also unabhängig ist von der Gruppirung der Perioden.

Dies lässt sich ohne Mühe beweisen, wenn man vorher die Beziehungen zwischen den zehn Constanten der zweiten Stufe, die einer bestimmten syzygetischen Periodengruppe $\{K, L\}$ entsprechen, in ihrer allgemeinen Form dargestellt hat.

Es giebt im Ganzen 16 Functionen mit der Gruppe $\{K, L\}$ als Basis. Wenn wir eine Hauptreihe aufstellen und die Functionen dieser Reihe durch die Indices 1, 2, ... 5 bezeichnen, so ist dadurch die Bezeichnung der übrigen von selbst festgesetzt; Q_{123}, Q_{124}, ... Q_{345} sind die zehn Functionen der zweiten Art, q_{123}, ... q_{345} also die zehn zur Gruppe gehörigen Constanten, während die Functionen der Hauptreihe: Q_1, Q_2, ... Q_5 und ausserdem Q_{12345} von der ersten Art sind.

Für die Aufstellung der Beziehungen zwischen diesen Grössen hatten wir am Schluss von § 3 des ersten Abschnittes ein Vorzeichen

$$(M) = (M, MK, ML) = (ML|M)$$

eingeführt, von dem wir jetzt Gebrauch machen.

§ 9.

Satz. Zwischen den zehn Constanten zweiter Stufe, die zu einer bestimmten Periodengruppe $\{K, L\}$ gehören, bestehen fünf unabhängige Gleichungen:

$$(1.) \quad (2345)q_{234}+(3415)q_{341}+(4125)q_{412}+(1235)q_{123} = 0, \quad \text{etc.}$$

Der Bezeichnung liegt die Annahme einer Hauptreihe Q_1, Q_2, ... Q_5 zu Grunde; (2345) ist das erwähnte Vorzeichen.

Die zehn Grössen q sind Producte der Nullwerthe von je vier Thetafunctionen

$$q_a = c_a c_{aK} c_{aL} c_{aKL};$$

die Gleichungen selbst sind bekannt, nur wegen der Form, in der das Gleichungssystem aufgestellt ist, ist ein Beweis nothwendig.

Wir hatten eine solche Gleichung in § 2 als quadratische Relation zwischen den Grössen p der ersten Stufe aufgestellt. Diese vertritt zugleich alle analog gebildeten. Wir haben nur Folgendes zu beweisen:

Wenn L eine zu K syzygetische Periode ist, so lässt sich die Hauptreihe der sieben Functionen erster Stufe

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots \quad P_7$$

immer so wählen, dass P_6 durch die Periode L in P_7 übergeführt wird, und demnach L als 67 bezeichnet werden kann.

Dies lässt sich aber so zeigen. Wir wissen, dass 16 Functionen

$$\Theta_a \Theta_{aK} \Theta_{aL} \Theta_{aKL}$$

existiren, welche Producte gleichartiger Θ sind. Dann sind auch

$$\Theta_a \Theta_{aK} = P_a, \quad \Theta_{aL} \Theta_{aKL} = P_{aL}$$

Functionen erster Stufe, die aus gleichartigen Factoren bestehen. Wenn wir nun irgend eine Hauptreihe der P zu Grunde legen, so müssen beide zu den 64 Functionen

$$P_\alpha, \quad P_{\alpha\beta\varepsilon}, \quad P_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{und} \quad P_\varepsilon \qquad\qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots 7)$$

gehören. Es muss also der Index L durch Combination der Indices zweier solcher Functionen hervorgehen. Das heisst: L (oder, was auf dasselbe hinauskommt, LK) muss sich als Combination gerader Ordnung der Indices 1, 2, ... 7 darstellen lassen.

Ist diese Combination von der zweiten Ordnung: $L = \alpha\beta$, so können wir durch einfache Umstellung der Functionen $P_1, \ldots P_7$ bewirken, dass $L = 67$ wird.

Ist L von der vierten Ordnung: $L = \alpha\beta\gamma\delta$, und sind $\varkappa, \lambda, \mu$ die drei von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschiedenen Zahlen der Reihe 1 bis 7, so stellen wir die folgende Reihe auf:

$$P_{\alpha\mu\varepsilon}, \quad P_{\beta\mu\varepsilon}, \quad P_{\gamma\mu\varepsilon}, \quad P_{\delta\varkappa\varepsilon}, \quad P_\delta, \quad P_\varkappa, \quad P_{\lambda\mu\varepsilon}.$$

Dies ist ebenfalls eine Hauptreihe, da durch die Combination dreier Indices immer ein dreigliedriger oder der Index ε hervorgeht. Hier geht die letzte Function aus der vorletzten hervor durch Vermehrung der Argumente um die halbe Periode $\varkappa\lambda\mu\varepsilon = \alpha\beta\gamma\delta = L$.

Ist endlich L eine Combination von sechs Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ der Reihe 1 bis 7, $\varkappa$ die siebente, so können wir

$$P_{\alpha\mu\varepsilon}, \quad P_{\beta\mu\varepsilon}, \quad P_{\gamma\mu\varepsilon}, \quad P_{\lambda\mu\varepsilon}, \quad P_\varkappa, \quad P_\delta, \quad P_{\delta\varkappa\varepsilon}$$

als Hauptreihe wählen; dann wird ebenfalls dasselbe erreicht wie vorhin.

Es ist also keine Beschränkung der Periode L, sondern nur eine Voraussetzung über die Wahl der Hauptreihe $P_1, \dots P_7$, wenn wir $L = 67$ setzen.

Nun ist nach Gleichung V. des Systems (*B.*), welche in § 2 aus den allgemeinen Eigenschaften der Thetafunctionen bewiesen wurde:

$$(2.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{4} |(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67) p_{\alpha 56} p_{\alpha 57}| = 0.$$

Da $L = 67$ ist, so ist

$$p_{\alpha 56} p_{\alpha 57} = p_{\alpha 57} p_{\alpha 57 L} = q_{\alpha 57};$$

ferner:

$$(\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon 67) = (\alpha\varepsilon|\alpha\varepsilon L) = (\alpha\varepsilon L) = (\alpha\varepsilon 67).$$

Somit geht die Gleichung (2.) über in folgende:

$$(3.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{4} |(\alpha\varepsilon 67) q_{\alpha 57}| = 0,$$

oder, da $(1\varepsilon 67) = (2345)$ ist, etc.

$$(4.)\qquad (2345) q_{157} + (3415) q_{257} + (4125) q_{357} + (1235) q_{457} = 0.$$

Bei dieser Bezeichnung ist aber nicht eine Hauptreihe der Q, sondern eine solche der P zu Grunde gelegt. Dies lässt sich leicht ändern. Offenbar sind

$$P_6 P_7, \quad P_{16\varepsilon} P_{17\varepsilon}, \quad P_{26\varepsilon} P_{27\varepsilon}, \quad \dots \quad P_{56\varepsilon} P_{57\varepsilon}$$

oder:

$$Q_6, \quad Q_{16\varepsilon}, \quad Q_{26\varepsilon}, \quad \dots \quad Q_{56\varepsilon}$$

die sechs von den 16 Functionen Q, welche aus ungeraden Factoren bestehen. Es bilden also:

$$Q_{16\varepsilon}, \quad Q_{26\varepsilon}, \quad \dots \quad Q_{56\varepsilon}$$

eine Hauptreihe für die Functionen Q. Setzen wir nun:

$$16\varepsilon = a, \quad 26\varepsilon = b, \quad 36\varepsilon = c, \quad 46\varepsilon = d, \quad 56\varepsilon = e,$$

so sind:

$$Q_a, \quad Q_b, \quad Q_c, \quad Q_d, \quad Q_e$$

die Functionen der Hauptreihe, und gleichzeitig ist

$$bcd = 2346\varepsilon = 157,$$

$$cda = 257, \quad dab = 357, \quad abc = 457;$$

endlich

$$2345 = bcde, \quad 3415 = cdae \quad \text{etc.}$$

Folglich geht die Gleichung (4.) über in:

$$(bcde)q_{bcd}+(cdae)q_{cda}+\cdots+(abce)q_{abc} = 0;$$

und wenn wir jetzt an Stelle von a, b, c, d, e wieder die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 einführen, so erhalten wir die zu beweisende Gleichung. Da man die Indices 1 bis 5 vertauschen kann, so repräsentirt sie ein System von fünf Gleichungen.

Diesen lässt sich eine noch einfachere Form geben. Wir setzen

$$12345 = \lambda.$$

Dann wird

$$(2345) = (1\lambda) \quad \text{etc.},$$

$$q_{234} = q_{15\lambda}.$$

Die Gleichung (1.) geht also über in:

$$(1\lambda)q_{15\lambda}+(2\lambda)q_{25\lambda}+(3\lambda)q_{35\lambda}+(4\lambda)q_{45\lambda} = 0.$$

Wenn wir nun zur Abkürzung setzen:

$$(5.) \qquad (\alpha\lambda)(\beta\lambda)q_{\alpha\beta\lambda} = k_{\alpha\beta} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots\ 5\\ \alpha \gtrless \beta\end{smallmatrix}\right),$$

so bekommen wir zwischen den zehn Grössen k, welche das System der zehn Constanten zweiter Stufe vertreten können, die Gleichungen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} k_{21}+k_{31}+k_{41}+k_{51} = 0, \\ k_{12}+k_{32}+k_{42}+k_{52} = 0, \\ k_{13}+k_{23}+k_{43}+k_{53} = 0, \\ k_{14}+k_{24}+k_{34}+k_{54} = 0, \\ k_{15}+k_{25}+k_{35}+k_{45} = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$ ist. — Man bekommt noch ein zweites System ähnlicher Art:

$$(7.) \qquad k_{12}+k_{23}+k_{31} = k_{45} \quad \text{etc.},$$

wenn man drei dieser Gleichungen addirt und die beiden übrigen subtrahirt.

§ 10.

Wir gehen jetzt zum Beweise des Hauptsatzes über. Jedenfalls ist der Werth des Ausdruckes

$$(1.) \qquad F(r_1, r_2, r_3) = r_1^2+r_2^2+r_3^2-2r_1r_2-2r_1r_3-2r_2r_3,$$

in welchem r_1, r_2, r_3 drei zusammengehörige Constanten dritter Stufe bedeuten, durch die Angabe der drei syzygetischen Perioden K, L, M, welche die zugehörige Gruppe repräsentiren, völlig bestimmt, da ja zu jeder solchen Gruppe nur drei Constanten dritter Stufe gehören und F eine rationale symmetrische Function ist. Man kann also

$$(2.)\quad F(r_1, r_2, r_3) = \Phi(K, L, M)$$

setzen; und da Φ nur von der Gruppe abhängt, so können K, L, M unter einander vertauscht, ferner K durch KL, KM oder KLM ersetzt werden, u. s. f., ohne dass der Werth von Φ sich ändert.

Wir denken uns zunächst K und L als fest, und, wie im vorigen Paragraphen, eine Hauptreihe

$$(3.)\quad Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5$$

für die 16 zur Gruppe $\{K, L\}$ gehörigen Functionen Q aufgestellt. Da die Perioden K, L, M syzygetisch sein sollen, so giebt es *eine* Function R_a mit der Basis $\{K, L, M\}$, welche aus lauter ungeraden Factoren besteht. Diese kann aber als Product zweier Functionen der zweiten Stufe mit der gemeinsamen Basis $\{K, L\}$ aufgefasst werden:

$$R_a = Q_a Q_{aM}.$$

Es existirt aber ausser den Functionen Q der Hauptreihe nur noch die eine, Q_{12345}, welche ein Product ungerader Theta ist. Folglich muss sowohl Q_a als Q_{aM} eine der sechs Functionen

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5,\ Q_{12345}$$

sein, d. h. es müssen in der Reihe zwei Functionen sein, welche durch die Periode M in einander übergeführt werden. Deswegen muss entweder M oder MK oder ML oder MKL darstellbar sein als Combination gerader Ordnung der Indices 1, 2, ... 5. Wir können aber M selbst in dieser Form dargestellt denken, da ja M durch MK, ML und MKL ersetzt werden darf, ohne dass der Werth von Φ eine Aenderung erleidet.

Es sind deshalb nur 15 verschiedene Werthe für M zu setzen, wenn man K, L als fest annimmt, nämlich die zehn Combinationen zweiter und die fünf Combinationen vierter Ordnung der Zahlen 1 bis 5.

Nehmen wir zunächst $M = 45$, so sind

$$(4.)\quad \begin{cases} q_{234}q_{235} = r_1, \\ q_{314}q_{315} = r_2, \\ q_{124}q_{125} = r_3 \end{cases}$$

die drei Constanten dritter Stufe, welche zur Gruppe $\{K, L, M\}$ gehören. Nehmen wir aber $M = 1245$, so sind

$$(5.)\quad \begin{cases} q_{234}q_{135} = s_1, \\ q_{314}q_{235} = s_2, \\ q_{312}q_{345} = s_3 \end{cases}$$

die zugehörigen drei Constanten.

Führen wir an Stelle der Grössen q die mit k bezeichneten Werthe ein, so erhalten wir:

$$(6.)\quad \begin{cases} \alpha k_{14}k_{15} = r_1, & \beta k_{15}k_{24} = s_1, \\ \alpha k_{24}k_{25} = r_2, & \beta k_{25}k_{14} = s_2, \\ \alpha k_{34}k_{35} = r_3, & \beta k_{12}k_{45} = s_3; \end{cases}$$

wo

$$(7.)\quad \alpha = (4\lambda)(5\lambda),\quad \beta = (1\lambda)(2\lambda)(4\lambda)(5\lambda).$$

Hieraus folgt zunächst

$$(8.)\quad r_1 r_2 = s_1 s_2.$$

Ferner:

$$(9.)\quad \alpha(r_1+r_2-r_3)+\beta(s_1+s_2-s_3) = (k_{14}+k_{24})(k_{15}+k_{25})-k_{34}k_{35}-k_{12}k_{45}.$$

Nun ist aber dem Gleichungssystem (6.) des vorigen Paragraphen zufolge:

$$k_{14}+k_{24} = -k_{34}-k_{54},$$
$$k_{15}+k_{25} = -k_{35}-k_{45}.$$

Dadurch geht in der Formel (9.) der Ausdruck auf der rechten Seite über in:

$$(10.)\quad (k_{34}+k_{54})(k_{35}+k_{45})-k_{34}k_{35}-k_{12}k_{45} = k_{45}(k_{34}+k_{35}+k_{45}-k_{12}).$$

Dies ist aber gleich Null nach dem zweiten Gleichungssystem, das sich als Folge des ersten ergab. Mithin folgt aus (9.):

$$(11.)\quad (r_1+r_2-r_3)^2 = (s_1+s_2-s_3)^2.$$

Da ausserdem $r_1 r_2 = s_1 s_2$ ist, so ist

$$(12.)\quad F(r_1,\ r_2,\ r_3) = F(s_1,\ s_2,\ s_3)$$

oder:

$$(13.)\quad \Phi(45,\ K,\ L) = \Phi(1245,\ K,\ L).$$

Durch successive Vertauschungen der Indices 1, 2, 3, 4, 5 folgt aus dieser letzten Gleichung, dass der Ausdruck $\Phi(K, L, M)$ denselben Werth hat für alle 15 Perioden, die für M gesetzt werden können, wenn man K und L festhält. Der Werth desselben ist also schon bestimmt durch K und L allein:

$$(14.)\quad \Phi(K,\ L,\ M) = \Psi(K,\ L).$$

Da man L mit M vertauschen, und auch L durch LM ersetzen kann, so folgt:

$$(15.)\quad \Psi(K,\ L) = \Psi(K,\ M) = \Psi(K,\ LM).$$

Bei dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass nicht nur L und M zu K, sondern auch M zu L syzygetisch ist. Aber diese letzte Bedingung kann man fortlassen. Denn setzt man von einer vierten Periode N nur voraus, dass sie zu K syzygetisch ist, so ist sie auch wenigstens zu einer der drei Perioden L, M, LM syzygetisch, folglich auch $\Psi(K, N)$ einem der Werthe (15.) gleich; mithin

$$\Psi(K, L) = \Psi(K, N),$$

gleichviel ob L und N syzygetische Perioden sind oder nicht. Setzt man demnach

$$\Psi(K, L) = X(K),$$

so wiederholt sich derselbe Schluss; es ist

$$X(K) = X(L) = X(KL),$$

wenn L und K syzygetische Perioden sind; jede dritte Periode ist entweder zu K oder L oder KL syzygetisch; folglich hat $X(K)$ für alle Perioden denselben Werth.

Der Ausdruck $\Phi(K, L, M)$ ist daher vollständig invariant.

Der in § 8 aufgestellte Satz ist hiermit bewiesen. Die verschiedenen Gleichungen

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} = 0,$$

deren jede einer syzygetischen Gruppe dritter Stufe entspricht, stellen also nicht mehr als eine Bedingung zwischen den Periodicitätsmoduln dar. Zu zeigen bleibt jetzt nur, dass sie überhaupt eine Bedingung darstellen, d. h. dass die Grösse J nicht identisch 0 ist. Es folgt dies zwar schon aus dem Umstande, dass im allgemeinen Falle aus dem Verschwinden zweier Grössen c_m, c_n nicht folgen darf, dass noch eine dritte, c_p, Null wird. Dennoch lohnt es sich, auch hier einen directen Beweis zu führen, der auf der Entwickelung von J nach Potenzen eines der auftretenden Parameter beruht.

§ 11.

Wir denken uns die Thetafunctionen auf die specielle Form reducirt, in der ausser den ϱ Argumenten nur die wesentlichen Constanten, nämlich die Periodicitätsmoduln τ auftreten. An Stelle der allgemeinen quadratischen Function von 2ϱ Grössen

$$G(u_1, u_2, \dots u_\varrho;\ n_1+\nu_1, \dots n_\varrho+\nu_\varrho)$$

(s. § 1 des ersten Abschnitts) tritt alsdann der reducirte Ausdruck

$$g(v_1, \dots v_\varrho;\ n_1+\nu_1, \dots n_\varrho+\nu_\varrho) = \pi i \sum_{\alpha,\beta}^{\varrho}{}_1 \{\tau_{\alpha\beta}(n_\alpha+\nu_\alpha)(n_\beta+\nu_\beta)\}$$
$$+2\pi i \sum_{\alpha=1}^{\varrho}(n_\alpha+\nu_\alpha)v_\alpha,$$

wo $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ ist. In dieser Form wird die Thetafunction als

$$\vartheta(v_1, \dots v_\varrho;\ \mu, \nu)$$

bezeichnet; im Uebrigen bleiben die Bezeichnungen unverändert. Jede der Grössen c_m ist demnach dargestellt durch eine Reihe:

$$(1.) \qquad c_m = \sum_{(n)} \left\{ e^{\pi i \chi(n_1+\frac{1}{2}\varepsilon_1, \dots n_\varrho+\frac{1}{2}\varepsilon_\varrho) + \pi i \Sigma \delta_\alpha (n_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha)} \right\},$$

in welcher χ die quadratische Function

$$(2.) \qquad \chi(x_1, \dots x_\varrho) = \sum_{\alpha,\beta}^{\varrho}{}_1 (\tau_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta)$$

bedeutet, und

$$(3.) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\varrho}(\delta_\alpha \varepsilon_\alpha) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

ist. Zu jedem c gehört eine bestimmte Charakteristik. Eine Constante dritter Stufe ist ein Product von acht Grössen der Form (1.); die acht Charakteristiken sind sämmtlich verschieden, genügen der Bedingung (3.), und ausserdem gilt für dieselben Folgendes: Wenn man durch Zusammensetzung einer geraden Anzahl aus diesen acht Systemen Perioden-Charakteristiken bildet, so erhält man eine Gruppe $\{K, L, M\}$ dritter Stufe. Dass diese syzygetisch sein muss, ist selbstverständlich. Endlich wissen wir: es giebt immer drei solche Systeme von je acht Charakteristiken, bei denen die Periodengruppe dieselbe ist.

Für $\varrho = 3$ lassen sich ebenfalls Systeme von $2^\varrho = 8$ Charakteristiken bilden, die diesen Bedingungen genügen, z. B. diejenigen acht, welche man erhält, wenn man jedes ε gleich Null setzt, jedem δ aber seine zwei verschiedenen Werthe beilegt. Es sei

$$(4.) \qquad \begin{pmatrix} \overset{a}{\delta}_1 & \overset{a}{\delta}_2 & \overset{a}{\delta}_3 \\ \overset{a}{\varepsilon}_1 & \overset{a}{\varepsilon}_2 & \overset{a}{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} \qquad (a = 1, 2, \dots 8)$$

ein derartiges ***vollständiges Göpel***sches System von acht Charakteristiken für $\varrho = 3$. Fügt man nun noch ein Zahlenpaar

$$(5.) \qquad \overset{a}{\delta}_4 = \delta_4, \quad \overset{a}{\varepsilon}_4 = \varepsilon_4$$

hinzu, das für alle acht Charakteristiken (4.) dieselben Werthe hat und der Bedingung

$$(6.) \qquad \delta_4 \varepsilon_4 = 0$$

genügt, so bekommt man für $\varrho = 4$ ein System von acht Charakteristiken für eine Constante dritter Stufe; und man bekommt drei Systeme, welche drei zusammengehörigen Constanten dritter Stufe entsprechen, wenn man die drei verschiedenen Annahmen

$$(7.)\quad \delta_4 = 0,\quad \varepsilon_4 = 0;\quad \delta_4 = -1,\quad \varepsilon_4 = 0;\quad \delta_4 = 0,\quad \varepsilon_4 = 1$$

macht.

Ein solches System von 3.8 Charakteristiken denken wir uns der Entwickelung zu Grunde gelegt; es ist gleichgültig, welches, da die invariante Grösse J von der besonderen Wahl der Periodengruppe unabhängig ist.

Wir zerlegen die Function χ in

$$(8.)\quad \bar{\chi}(x_1, x_2, x_3) + 2\sum_{\alpha=1}^{3} \tau_{\alpha 4} x_\alpha x_4 + \tau_{44} x_4^2,$$

wo

$$(9.)\quad \bar{\chi}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha,\beta}^{3}{}_1 \{\tau_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\}$$

ist, und setzen:

$$(10.)\quad \tau_{\alpha 4} = w_\alpha \quad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, 3)};\quad \tau_{44} = \tau;$$

ferner:

$$(11.)\quad e^{\pi i \tau} = h.$$

An Stelle des Exponenten in der Gleichung (1.) tritt dann folgender:

$$(12.)\quad \begin{cases} \pi i \bar{\chi}(n_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1, n_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2, n_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_3) \\ + 2\pi i (n_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_4) \sum_{\alpha=1}^{3} \{(n_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha) w_\alpha\} + \pi i \tau (n_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_4)^2 \\ + \pi i \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_\alpha (n_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha) + \pi i \delta_4 (n_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_4). \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn wir die Reihenentwickelung von c_m nach Potenzen von $e^{\pi i \tau} = h$ ordnen:

$$(13.)\quad c_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ e^{\pi i \delta_4 (n + \frac{1}{2}\varepsilon_4)} h^{(n + \frac{1}{2}\varepsilon_4)^2} \vartheta((n + \tfrac{1}{2}\varepsilon_4) w_1, \dots (n + \tfrac{1}{2}\varepsilon_4) w_3) \};$$

sodass also hier die Coefficienten durch Thetafunctionen dreier Veränderlichen mit derselben Charakteristik

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_1 & \frac{1}{2}\delta_2 & \frac{1}{2}\delta_3 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

gebildet sind. Wegen der Congruenzen (3.) sind diese Thetafunctionen gerade, wenn $\delta_4 \varepsilon_4 = 0$ ist, ungerade im anderen Falle.

Nehmen wir zunächst $\varepsilon_4 = 0$ an, so erhalten wir:

$$(14.)\qquad c_m = \vartheta(0,0,0)+2(-1)^{\delta_4} h\vartheta(w_1, w_2, w_3)+\text{etc.}$$

Ist aber $\varepsilon_4 = 1$, so fängt die Entwickelung an mit:

$$(15.)\qquad c_m = 2i^{\delta_4} h^{\frac{1}{4}} \vartheta(\tfrac{1}{2}w_1, \tfrac{1}{2}w_2, \tfrac{1}{2}w_3)+\text{etc.}$$

Wir haben drei Producte r_1, r_2, r_3 von je acht solchen Ausdrücken zu bilden. Die drei Producte unterscheiden sich von einander nur in den Annahmen über δ_4, ε_4; die Charakteristiken der Functionen dreier Argumente, welche als Coefficienten auftreten, sind dieselben (vgl. (4.)). Es treten also nur acht Thetafunctionen dreier Argumente auf, die sämmtlich gerade sind und eine vollständige *Göpel*sche Gruppe bilden. Nennen wir diese

$$(16.)\qquad \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \dots\ \vartheta_8,$$

so erhalten wir:

$$(17.)\qquad \begin{cases} r_1 = \prod_{\alpha=1}^{8} \{\vartheta(0,\ 0,\ 0)_\alpha+2h\vartheta(w_1,\ w_2,\ w_3)_\alpha+\ \text{etc.}\}, \\ r_2 = \prod_{\alpha=1}^{8} \{\vartheta(0,\ 0,\ 0)_\alpha-2h\vartheta(w_1,\ w_2,\ w_3)_\alpha+\ \text{etc.}\}, \\ r_3 = \prod_{\alpha=1}^{8} \{2h^{\frac{1}{4}}\vartheta(\tfrac{1}{2}w_1,\ \tfrac{1}{2}w_2,\ \tfrac{1}{2}w_3)_\alpha+\ \text{etc.}\}. \end{cases}$$

Wir bezeichnen nun mit f das Product der sämmtlichen Grössen

$$\vartheta(0,\ 0,\ 0)_1,\ \dots\ \vartheta(0,\ 0,\ 0)_8,$$

mit f_α das Product aller mit Ausschluss von $\vartheta(0,0,0)_\alpha$; sodass

$$(18.)\qquad \prod_{\alpha=1}^{8} \{\vartheta(0,\ 0,\ 0)_\alpha\} = f = f_\alpha \vartheta(0,\ 0,\ 0)_\alpha$$

ist; ferner mit S die Summe

$$(19.)\qquad \sum_{\alpha=1}^{8} \{f_\alpha \vartheta(w_1,\ w_2,\ w_3)_\alpha\} = S;$$

mit P das Product

$$(20.)\qquad \prod_{\alpha=1}^{8} \{\vartheta(0,\ 0,\ 0)_\alpha \vartheta(\tfrac{1}{2}w_1,\ \tfrac{1}{2}w_2,\ \tfrac{1}{2}w_3)_\alpha\} = P.$$

Dann sind die Anfangsglieder in den Entwickelungen von r_1, r_2 und fr_3 nach Potenzen von h:

$$r_1 = f+2Sh+\ \text{etc.},$$
$$r_2 = f-2Sh+\ \text{etc.},$$
$$fr_3 = 2^8 Ph^2+\ \text{etc.}$$

Hieraus folgt, da

$$J = (r_1-r_2)^2-2r_3(r_1+r_2)+r_3^2$$

ist:

$$(21.)\quad J = 16(S^2-64P)h^2 + \text{ etc.}$$

Diese Entwickelung giebt noch einen eigenthümlichen Satz für die Thetafunctionen dreier Variabeln. w_1, w_2, w_3 können als vollständig willkürliche Grössen aufgefasst werden. Der Werth des ersten Coefficienten in dieser Potenzreihe, oder

$$(22.)\quad S^2-64P = H$$

kann nicht davon ahhängen, welches *Göpel*sche System man gewählt hat; somit ist auch dieser Ausdruck als eine Perioden-Invariante zu betrachten, die aber noch die Variabeln selbst enthält.

Um mit völliger Deutlichkeit zu erkennen, dass H nicht identisch Null ist, denken wir uns die Parameter τ_{11}, τ_{22}, τ_{33}, τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} durch die Gleichung

$$\vartheta(0,\ 0,\ 0)_1 = 0$$

beschränkt, wodurch wir statt der allgemeinen Functionen dreier Variabeln hyperelliptische erhalten; und w_1, w_2, w_3 so gewählt, dass

$$\vartheta(w_1,\ w_2,\ w_3)_1$$

von 0 verschieden ist. Da in diesem Fall nur der Nullwerth eines einzigen geraden ϑ verschwindet, so sind zwar f, f_2, f_3, $\dots$ f_8 gleich Null, f_1 aber von Null verschieden. Demnach reducirt sich

$$P \text{ auf } 0, \qquad S \text{ auf } f_1\vartheta(w_1,\ w_2,\ w_3);$$

daher wird

$$H = f_1^2\vartheta^2(w_1,\ w_2,\ w_3)_1.$$

Es zeigt sich also:

Man kann zwar τ_{44} als Function der übrigen Parameter so definiren, dass die Gleichung $J=0$ erfüllt wird; aber es ist J nicht identisch 0.

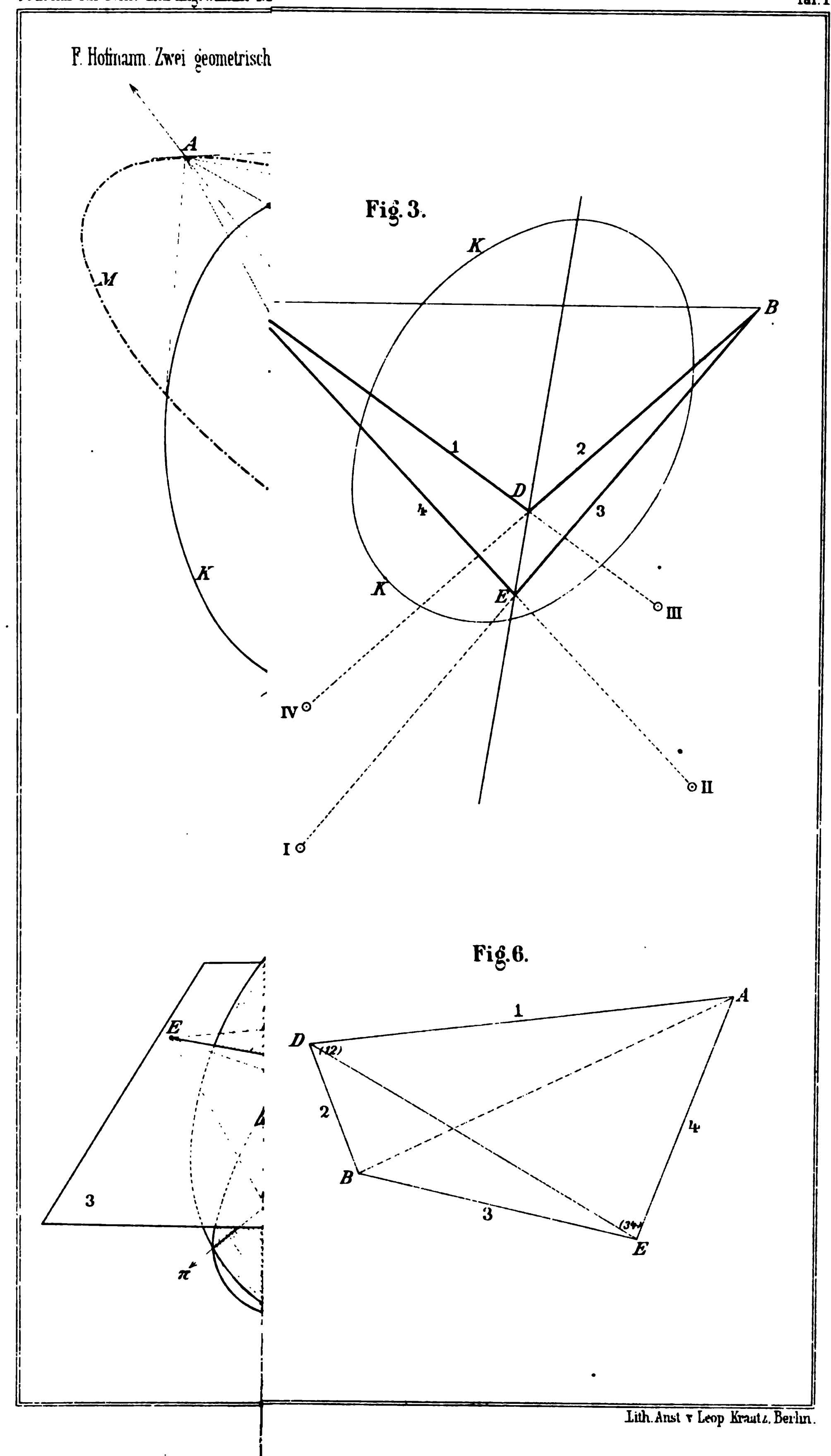
Zürich, den 24. November 1886.

Druckfehler.

Seite 326, Zeile 9 lese man $(12|34) = (1\varepsilon|3\varepsilon)(1\varepsilon|4\varepsilon)(2\varepsilon|3\varepsilon)(2\varepsilon|4\varepsilon)$.

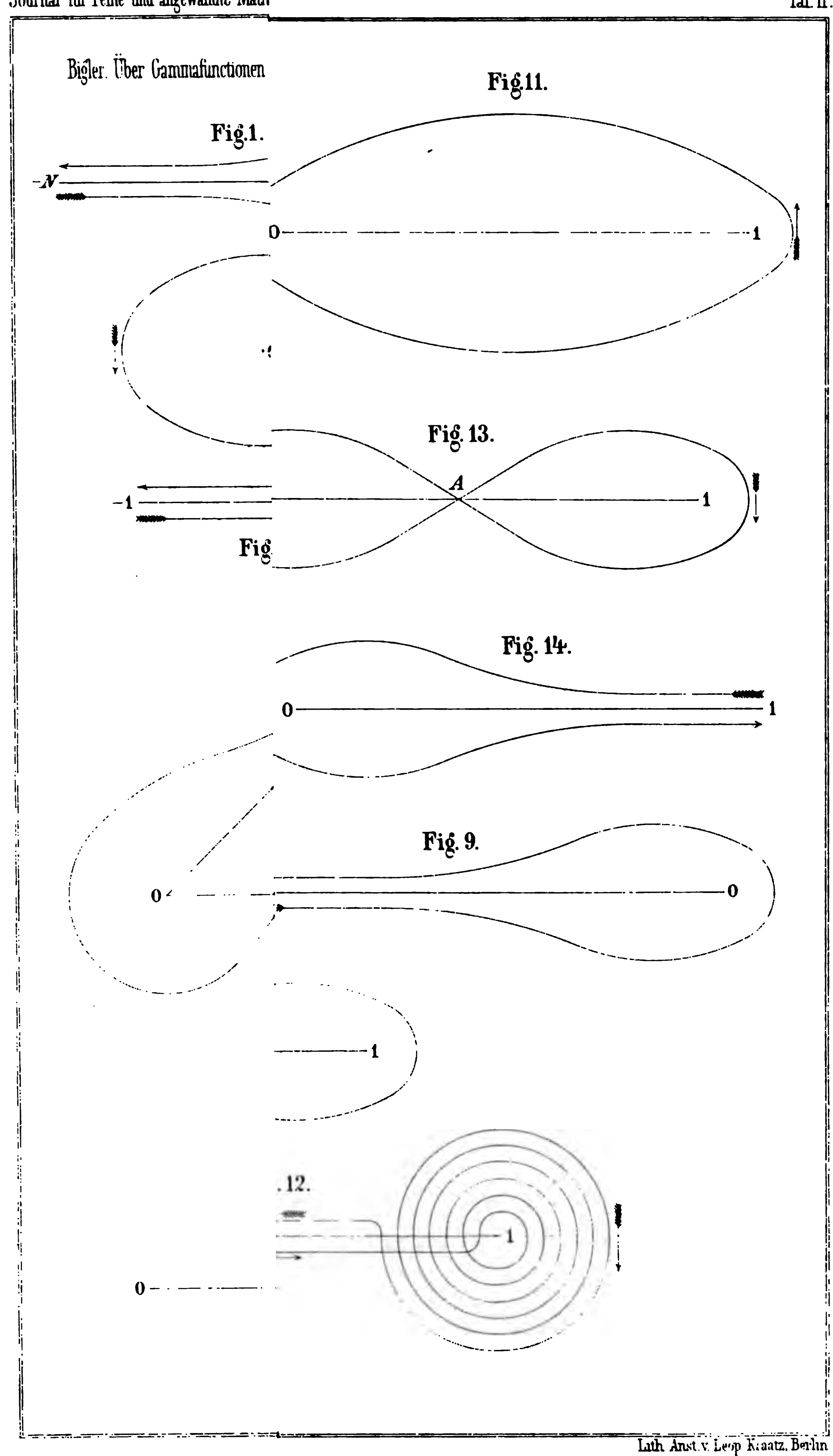
„ 328, Formel (2.) lese man $[67\varepsilon, 2, 3]$ statt $[67, 2, 3]$.

„ 333, „ (10.) „ „ $(36|27)p_{356}p_{257}$ statt $(36|27)p_{356}p_{267}$.



Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin.





Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin



